T-79.144 **Syksy 2003**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 3 (lauselogiikka, kappaleet 3.6 - 4.3)
23 – 26.9.2003

1. Määrittele Shefferin viiva Peircen nuolen avulla.

Ratk.
Shefferin viivan määritelmä: $A \mid B \equiv \neg(A \wedge B)$
Piercen nuolen määritelmä: $A \downarrow B \equiv \neg(A \vee B)$

Määritelmä:

$$
\begin{aligned}
\neg\alpha &\equiv \alpha \downarrow \alpha \\
(\alpha \wedge \beta) &\equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \equiv (\neg\alpha \downarrow \neg\beta) \equiv (\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta) \\
\neg(\alpha \wedge \beta) &\equiv ((\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta)) \downarrow ((\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta))
\end{aligned}
$$

2. Osoita, että

a) jos $\Sigma \models \phi$ ja $\Sigma \models \neg\phi$ jollekin lauseelle ϕ, niin lausejoukko Σ on toteutumaton.

Ratk.
Jos pätisi, että Σ toteutuva ja jollakin lauseella $\Sigma \models \phi$ ja $\Sigma \models \neg\phi$, niin Σ:lla oli malli $\mathcal{A}$ siten, että $\mathcal{A} \models \phi$ ja $\mathcal{A} \models \neg\phi$. Lause ϕ ei kuitenkaan voi olla samassa mallissa sekä tosi, että epätosi, mistä seuraa ristiriita, joten Σ ei voi olla toteutuva.

b) jos lausejoukolla Σ on täsmälleen yksi malli, niin jokaiselle lauseelle ϕ pätee $\Sigma \models \phi$ tai $\Sigma \models \neg\phi$ (muttei molemmat).

Ratk.
Kyllä, seuraa seuraavista asioista:

1. Loogista seuraavuutta tarvitsee tutkia vain tuon yhden mallin osalta.
2. Tämä malli määrää kaikkien lausiden totuusarvot yksikäsitteisesti.
3. $\neg\phi$:n mallit ovat kaikki ne, jotka eivät ole ϕ:n malleja ja päinvastoin.

3. Osoita seuraavat loogisen seuraavuuden ominaisuudet.

a) $\Sigma \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma)$.

b) Monotonisuus: $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \Rightarrow \mathrm{Cn}(\Sigma_1) \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma_2)$.

c) $\Sigma \models \phi \Rightarrow \mathrm{Cn}(\Sigma) = \mathrm{Cn}(\Sigma \cup \{\phi\})$.

d) $\mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(\Sigma)) = \mathrm{Cn}(\Sigma)$.

Ratk.

a) Merkintä $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ tarkoitti lausejoukon Σ loogisten seurauksien joukkoa. Joukko muodostuu lauseista, jotka ovat tosia kaikilla niillä totuusjakeluilla, joilla kaikki Σ:n lauseet ovat tosia. Jos siis olisi $\Sigma \nsubseteq \mathrm{Cn}(\Sigma)$, niin joukossa Σ olisi lause α ja lisäksi totuusjakelu, jolla kaikki Σ:n lauseet, siis myös α, olisivat tosia, ja α epätosi. Ilmeinen ristiriita.

b) Tarkastellaan mieliv. lausetta $\alpha \in \mathrm{Cn}(\Sigma_1)$. Tällöin α on tosi kaikilla niillä totuusjakeluilla, joilla Σ_1 lauseet ovat. Koska $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, niin myös Σ_2 mallit edellyttävät kaikkien Σ_1:n lauseiden toteutumista. Tällöin kaikilla Σ_2:n malleilla α on tosi ja $\alpha \in \mathrm{Cn}(\Sigma_2)$. Kiteyttäen voidaan todeta, että enemmän lauseita $\Rightarrow$ vähemmän malleja $\Rightarrow$ enemmän loogisia seurauksia.

4. Mallinna lauselogiikalla kolmen äänestäjän äänestysjärjestelmää, jonka malleista joko positiivinen (enemmistö jaa-ääniä) tai negatiivinen äänestystulos voidaan lukea. Kuinka malli muuttuu, jos äänestäjiä on neljä ja tasatuloksen sattuessa puheenjohtajan ääni ratkaisee.

Ratk.
Tarkoitus on siis laatia lausejoukko, joiden malleista äänestyksen tulos voidaan päätellä. Liitettäköön ensimmäisessä tapauksessa mainittuun kolmeen äänestäjään atomilauseet A, B ja C. Jos A on tosi, niin ensimmäinen äänestäjä antaa jaa-äänen jne. Malliin tarvitaan lisäksi atomilause, vaikkapa Y, joka kertoo äänestyksen tuloksen.

Näillä edellytyksillä sopiva mallinnus voisi olla vaikkapa seuraava:

$$\begin{array}{ccc} A \wedge B \rightarrow Y & A \wedge C \rightarrow Y & B \wedge C \rightarrow Y \\ \neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg Y & \neg A \wedge \neg C \rightarrow \neg Y & \neg B \wedge \neg C \rightarrow \neg Y \end{array}$$

Mallinnuksen järkevyyttä voi tutkia valitsemalla joitakin äänestystuloksia. Oletetaan esimerkiksi, että C äänestää JAA ja muut ei. Äänestyksen tulos pitäisi olla ei eli totuusjakelun $\mathcal{A} = \{C\}$ lausejoukon malli. Näin onkin, sillä ainoastaan implikaation $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg Y$ vasen puoli evaluoituu todeksi. Samasta syystä totuusjakelu $\mathcal{A}' = \{C, Y\}$ johtaisi ristiriitaan.

Kun mukaan otetaan puheenjohtaja erään mallinnuksen voisi toteuttaa seuraavaan tapaan. Otetaan mukaan bitti (atomilause) IC tarkoittamaan ei täysin ratkennutta äänestystulosta (inconclusive).

$$A \wedge B \wedge C \rightarrow Y \quad \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \rightarrow \neg Y$$

$$A \wedge \neg B \wedge \neg C \rightarrow IC \quad \neg A \wedge B \wedge \neg C \rightarrow IC \quad \neg A \wedge \neg B \wedge C \rightarrow IC$$
$$A \wedge B \wedge \neg C \rightarrow IC \quad A \wedge \neg B \wedge C \rightarrow IC \quad \neg A \wedge B \wedge C \rightarrow IC$$

$$IC \wedge P \rightarrow Y \quad IC \wedge \neg P \rightarrow \neg Y$$

Tarkastellaan esimerkkinä tapausta, jossa A ja puheenjohtaja P antavat JAA-äänen. Tällöin kahden ensimmäisen implikaation vasen puoli evaluoituu epätodeksi ja lauseet siten tosiksi. Implikaation $A \wedge \neg B \wedge \neg C \rightarrow IC$ vasen puoli evaluoituu todeksi, jolloin IC pitää ottaa mukaan totuusjakeluun. Koska P siis oli totta, niin lauseen $IC \wedge P \rightarrow Y$ perusteella äänestystulos on positiivinen, lopullisen totuusjakelun ollessa $\mathcal{A} = \{A, P, IC, Y\}$. Todetaan lisäksi, että muut lauseet eivät aiheuta ristiriitaa.

Mallinnuksessa on luonnollisesti vaihtoehtona myös kaikkien kombinaatioiden luettelointi.

5. Matkakorttijärjestelmän kortinlukijan valot toimivat näin:

1. Vihreä valo: kausilippu voimassa **tai** arvolippu maksettu **tai** vaihto voimassa.
2. Vihreä ja keltainen valo: kautta jäljellä 3 täyttä päivää tai vähemmän **tai** arvoa jäljellä 10 euroa tai vähemmän.
3. Punainen valo: kausi tai vaihto ei voimassa **tai** muu virhe.

Tutki lauselogiikan avulla, onko mahdollista, että mikään valoista ei syty.

Ratk.
Mallinnuksessa voidaan käyttää vaikkapa seuraavia atomeja:

A	=	"kausilippu voimassa"	D	=	"kautta $\leq$ 3pv"
B	=	"arvolippu maksettu"	E	=	"arvoa $\leq$ 10 euroa"
C	=	"vaihto voimassa"	F	=	"muu virhe"

Nyt tehtävän lauseet voi formalisoida seuraavasti:

1. $A \vee B \vee C \to V$
2. $D \vee E \to K \wedge V$
3. $\neg A \vee \neg C \vee F \to P$

Yllä literaalit V, K ja P viittaavat siis palavaan valoon. Järjestelmä vaatii siis, että ylläolevat lauseet ovat totta. Niillä ei ole sellaista mallia, jossa mikään valoista ei syty, esim. koska lauseelle A pitää aina valita totuusarvo, jolloin joko lauseen 1 tai 3 vasen puoli saa totuusarvon $\top$.