T-79.144 **Syksy 2003**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 11 (opetusmoniste, kappaleet 8.1 – 8.5)
18 – 21.11.2003

1. Todista resoluutiolla, että ei ole olemassa miesparturia, kun:

a) Jokainen parturi ajaa niiden miesten parrat, jotka eivät itse aja partaansa.

b) Kukaan parturi ei aja niiden miesten partoja, jotka ajavat itse partansa.

Kuvitellaan, että universumi koostuu joukosta miehiä. Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja: $P(x)$ = "x on parturi" ja $A(x,y)$ = "x ajaa y:n parran".

a) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(\neg A(y,y) \rightarrow A(x,y)))$,

b) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(A(y,y) \rightarrow \neg A(x,y)))$.

Muodostetaan klausuulit:

a) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(\neg A(y,y) \rightarrow A(x,y)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(A(y,y) \vee A(x,y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee A(y,y) \vee A(x,y))$
$\neg P(x) \vee A(y,y) \vee A(x,y)$
$\{\neg P(x_1),\ A(y_1,y_1),\ A(x_1,y_1)\}$

b) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(A(y,y) \rightarrow \neg A(x,y)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(\neg A(y,y) \vee \neg A(x,y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee \neg A(y,y) \vee \neg A(x,y))$
$\neg P(x) \vee \neg A(y,y) \vee \neg A(x,y)$
$\{\neg P(x_2),\ \neg A(y_2,y_2),\ \neg A(x_2,y_2)\}$

Halutaan todistaa $\neg \exists x P(x)$ ja siksi muodostetaan lauseen negaatio $\exists x P(x)$. Tämä lause muutetaan klausuulimuotoon $\{P(a)\}$.

Klausuuleista

$$\{\neg P(x_1),\ A(y_1,y_1),\ A(x_1,y_1)\} \qquad \text{ja} \qquad \{\neg P(x_2),\ \neg A(y_2,y_2),\ \neg A(x_2,y_2)\}$$

saadaan

$$\{\neg P(x_3)\} \qquad \text{(substituutio } \{x_1/x_3, x_2/x_3, y_1/x_3, y_2/x_3\})$$

Klausuuleista $\{P(a)\}$ ja $\{\neg P(x_3)\}$ saadaan tyhjä klausuuli (substituutio $\{x_3/a\}$). Täten klausuulijoukko on toteutumaton ja $\neg\exists x P(x)$ seuraa loogisesti premisseistä.

2. Esitetään luonnolliset luvut $0,1,2,\dots$ muuttujattomilla termeillä 0, $s(0)$, $s(s(0)),\dots$, jotka rakentuvat vakiosymbolista 0 ja funktiosymbolista s, joka tulkitaan funktioksi $s(x) = x+1$ luonnollisille luvuille x.

a) Tarkoittakoon predikaatit $J2(x), J3(x)$ ja $J6(x)$ sitä, että luonnollinen luku x on jaollinen kahdella, kolmella ja kuudella. Määrittele nämä predikaatit predikaattilogiikan lausein siten, että predikaatin $J6$ määritelmä perustuu predikaattien $J2$ ja $J3$ määritelmiin.

b) Todista resoluutiolla, että jos luonnollinen luku x on kahdella ja kolmella jaollinen, niin luonnollinen luku $x+6$ on kuudella jaollinen.

Ratk.
Todetaan ensin perustapaukset, s.o. että 0 on kahdella ja kolmella jaollinen.

$$
\begin{gathered}
J2(0) \\
J3(0)
\end{gathered}
$$

Edelleen, kuinka näistä päätellään jaollisuus suuremmille luvuille:

$$
\begin{gathered}
\forall x(J2(x) \to J2(s(s(x)))) \\
\forall x(J3(x) \to J2(s(s(s(x)))))
\end{gathered}
$$

Ja lopuksi määritellään kuudella jaollisuus:

$$\forall x(J2(x) \wedge J3(x) \to J6(x))$$

Jotta resoluutiota voisi soveltaa, tulee lauseet muuttaa klausuulimuotoon. Tässä tapauksessa se on melko suoraviivaista.

$$
\begin{aligned}
&\forall x(J2(x) \to J2(s(s(x)))) \\
&\forall x(\neg J2(x) \vee J2(s(s(x)))) \\
&\{\neg J2(x), J2(s(s(x)))\}
\end{aligned}
$$

Samoin $J3(x)$-predikaatin määrittelevälle lauseelle saadaan $\{\neg J3(x), J3(s(s(s(x))))\}$. Edelleen $J6(x)$:n määrittelevä lause saadaan muotoon:

$$\forall x(J2(x) \wedge J3(x) \rightarrow J6(x))$$
$$\forall x(\neg(J2(x) \wedge J3(x)) \vee J6(x))$$
$$\forall x(\neg J2(x) \vee \neg J3(x) \vee J6(x))$$
$$\{\neg J2(x), \neg J3(x), J6(x)\}$$

Kyselyn negaatiosta tulee seuraavat 3 klausuulia:

$$\neg\forall(J2(x) \wedge J3(x) \rightarrow J6(s^6(x)))$$
$$\neg\forall(\neg(J2(x) \wedge J3(x)) \vee J6(s^6(x)))$$
$$\neg\forall(\neg J2(x) \vee \neg J3(x)) \vee J6(s^6(x)))$$
$$\exists\neg(\neg J2(x) \vee \neg J3(x) \vee J6(s^6(x)))$$
$$\exists J2(x) \wedge J3(x) \wedge \neg J6(s^6(x))$$
$$\{J2(c)\}, \{J3(c)\} \text{ ja } \{\neg J6(s^6(c)\}$$

Resoluutio laaditaan seuraavasti:

1. $\{J2(c)\}$, P
2. $\{\neg J2(x_1), J2(s(s(x_1)))\}$, P
3. $\{J2(s(s(c)))\}$, 1 & 2, x_1/c
4. $\{\neg J2(x_2), J2(s(s(x_2)))\}$, P
5. $\{J2(s^4(c))\}$, 3 & 4, $x_2/s(s(c))$
6. $\{\neg J2(x_3), J2(s(s(x_3)))\}$, P
7. $\{J2(s^6(c))\}$, 5 & 6, $x_3/s^6(c)$
8. $\{J3(c)\}$, P
9. $\{\neg J2(x_4), J3(s(s(s(x_4))))\}$, P
10. $\{J3(s(s(s(c))))\}$, 7 & 8, x_4/c
11. $\{\neg J2(x_5), J3(s(s(s(x_5))))\}$, P
12. $\{J3(s^6(c))\}$, 9 & 10, $x_4/s(s(c)))$
13. $\{\neg J2(x_6), \neg J3(x_6), J6(x_6)\}$, P
14. $\{\neg J3(s^6(c)), J6(s^6(c))\}$, 7 & 13, $x_6/s^6(c)$

15. $\{J6(s^6(c))\}$, 12 & 14
16. $\{\neg J6(s^6(c))\}$, P
17. $\square$, 16 & 17

Resoluutiosta saatiin tyhjä klausuuli, so. väite pitää paikkansa.

3. Olkoon annettuna seuraavat lauseet[1]:

1. $\forall x(\mathrm{Close}(\mathrm{m},x) \to \mathrm{Reach}(\mathrm{m},x))$,
2. $\forall x(\mathrm{Tall}(x) \wedge \mathrm{On}(\mathrm{m},x) \wedge \mathrm{Under}(x,\mathrm{b}) \to \mathrm{Close}(\mathrm{m},\mathrm{b}))$,
3. $\mathrm{Tall}(\mathrm{c})$,
4. $\mathrm{Climb}(\mathrm{m},\mathrm{c})$,
5. $\forall z \mathrm{Moves}(\mathrm{m},\mathrm{c},z)$,
6. $\forall x(\mathrm{Climb}(\mathrm{m},x) \to \mathrm{On}(\mathrm{m},x))$,
7. $\forall x \forall y \forall z(\mathrm{Moves}(x,y,z) \to \mathrm{Close}(y,z) \vee \mathrm{Under}(y,z))$ ja
8. $\neg\mathrm{Close}(\mathrm{c},\mathrm{b})$.

Formalisoinnissa on käytetty seuraavia predikaatteja ja vakioita:

1. $\mathrm{Tall}(x) =$ "x on korkea",
2. $\mathrm{Climb}(x,y) =$ "x voi kiivetä y:n päälle",
3. $\mathrm{Close}(x,y) =$ "x on lähellä y:tä",
4. $\mathrm{On}(x,y) =$ "x on y:n päällä",
5. $\mathrm{Reach}(x,y) =$ "x ylettää y:hyn",
6. $\mathrm{Under}(x,y) =$ "x on y:n alla",
7. $\mathrm{Moves}(x,y,z) =$ "x (voi) siirtää y:n z:n lähelle"
8. $\mathrm{m} =$ "apina",
9. $\mathrm{c} =$ "tuoli" ja
10. $\mathrm{b} =$ "banaani".

[1] Esimerkki on kirjasta R.D. Dowsing, V.J. Rayward-Smith, C.D. Walter: A First Course in Formal Logic and its Applications in Computer Science

a) Mieti, mitä lausejoukon lauseet tarkoittavat.

b) Osoita resoluutiolla, että $\exists x \text{Reach}(m,x)$ on lausejoukon looginen seuraus.

c) Tutki resoluutiotodistuksen rakennetta. Mitä hyötyä siitä voisi olla tehtävän apinalle?

d) Suorita vastaava päättely `otter`-ohjelman avulla.

Ratk.

Valituista vakioista voidaan päätellä, että universumissamme esiintyvät apina, tuoli ja banaani. Predikaateista edelleen, että esineitä voidaan siirtää, erityisesti, että apina voi siirtää tuolia. Esinepareille annetaan lisäksi suhteita, esim. esine a on b:n lähellä, alla, jne. Lisäksi lause 2 ilmoittaa, että apina voi päästä banaanien lähellä, jos se on jonkun korkean esineen päällä ja ko. esine on banaanien alla. Oletettavasti siis yritetään kuvata tilannetta, jossa banaanit ovat korkealla (esim. katossa, puussa) ja apinan pitää suorittaa tiettyjä toimenpiteitä saadakseen mahansa kylläiseksi.

Kirjoitetaan `otter`-ohjelmalle syötetiedosto `monkey.otr`:

```
% Monkey example

set(binary_res).             % Resoluutiostrategia
assign(max_mem, 1500).       % 1.5 MB
assign(max_seconds, 1800).   % 30 min
set(free_all_mem).

formula_list(sos).

(all x (close(m,x) -> reach(m,x))).
(all x ((tall(x) & on(m,x) & under(x,b)) -> close(m,b))).
tall(c).
climb(m,c).
(all z moves(m,c,z)).
(all x (climb(m,x) -> on(m,x))).
(all x (all y (all z (moves(x,y,z) ->
          (close(y,z) | under(y,z)))))).
-close(c,b).
-(exists x reach(m,x)).

end_of_list.
```

Kutsutaan ohjelmaa komennolla `otter < monkey.otr > monkey.out` Tulostiedostosta löytyy nyt mm. kaavojen klausuuliesitys:

```
list(sos).
1 [] -close(m,x) | reach(m,x).
2 [] -tall(x) | -on(m,x) | -under(x,b) | close(m,b).
3 [] tall(c).
4 [] climb(m,c).
5 [] moves(m,c,z).
6 [] -climb(m,x) | on(m,x).
7 [] -moves(x,y,z) | close(y,z) | under(y,z).
8 [] -close(c,b).
9 [] -reach(m,x).
end_of_list.
```

sekä binääriresoluutiolla haettu todistus tyhjälle klausuulille:

```
1 [] -close(m,x) | reach(m,x).
2 [] -tall(x) | -on(m,x) | -under(x,b) | close(m,b).
3 [] tall(c).
4 [] climb(m,c).
5 [] moves(m,c,z).
6 [] -climb(m,x) | on(m,x).
7 [] -moves(x,y,z) | close(y,z) | under(y,z).
8 [] -close(c,b).
9 [] -reach(m,x).
10 [binary,1,9] -close(m,x).
11 [binary,6,4] on(m,c).
12 [binary,7,5] close(c,x) | under(c,x).
15 [binary,12,8] under(c,b).
17 [binary,2,11] -tall(c) | -under(c,b) | close(m,b).
24 [binary,17,15] -tall(c) | close(m,b).
26 [binary,24,3] close(m,b).
27 [binary,26,10] .
```

Näinollen klausuulijoukko on toteutumaton ja $\exists x \mathrm{Reach}(m,x)$ seuraa loogisesti premisseistä. Otterin tekemästä todistuksesta voi havaita, että tehdyt resoluutioaskeleet vastaavat täsmälleen niitä toimenpiteitä, joita apinan tulee tehdä ylettyäkseen banaaneihin.