T-79.144 **Syksy 2003**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 10 (opetusmoniste, kappaleet 5.3 – 7.3)
11 – 14.11.2003

1. Kvanttorilla $\exists!x$ tarkoitetaan, että "on olemassa vain yksi x". Väittämä $\exists!x\,\phi(x)$ voidaan ilmaista predikaattilogiikan lauseella

$$(\exists x \phi(x)) \wedge (\forall x \forall y (\phi(x) \wedge \phi(y) \rightarrow x = y)).$$

Formalisoi seuraavat lauseet predikaattilogiikalla:

1. On vain yksi kuuraparta.
2. Kaikki joulupukit ovat kuurapartoja.
3. Kaikki kuuraparrat ovat joulupukkeja.

---

4. On vain yksi joulupukki.

Osoita semanttisella taululla, että lause 4 on lauseiden 1-3 looginen seuraus.

Ratk.
Tarkoittakoon predikaatti $K(x)$, että x on kuuraparta ja predikaatti $J(x)$, että x on joulupukki. Näistä lähtökohdista lauseet voidaan formalisoida seuraavasti:

- $\exists x K(x) \wedge \forall x \forall y (K(x) \wedge K(y) \rightarrow x = y)$
- $\forall x (J(x) \rightarrow K(x))$
- $\forall x (K(x) \rightarrow J(x))$

Kysely on luonnollisesti muotoa:

$$\exists x J(x) \wedge \forall x \forall y (J(x) \wedge J(y) \rightarrow x = y)$$

Todistus semanttisella taululla on seuraava:

1. $T(\exists x K(x) \wedge \forall x \forall y (K(x) \wedge K(y) \to x = y))$

2. $T(\forall x (J(x) \to K(x)))$

3. $T(\forall x (K(x) \to J(x)))$

4. $E(\exists x J(x) \wedge \forall x \forall y (J(x) \wedge J(y) \to x = y))$

5. $T(\exists x K(x))$, 1.

6. $T(\forall x \forall y (K(x) \wedge K(y) \to x = y))$

7. $E(\exists x J(x))$ 7. $E(\forall x \forall y (J(x) \wedge J(y) \to x = y))$

8. $T(K(a))$, 5. x/a 8. $E(\forall y (J(b) \wedge J(y) \to b = y))$, 7. x/b

9. $E(J(a))$, 7. x/a 9. $E(J(b) \wedge J(c) \to b = c)$, 8. y/c

10. $T(K(a) \to J(a))$, 3.   10. $T(J(b) \wedge J(c))$

11. $E(K(a))$ $\times$ 11. $T(J(a))$ $\times$ 11. $E(b = c)$

12. $T(J(b))$

13. $T(J(c))$

14. $T(K(b) \wedge K(c) \to b = c)$, 6. $x/b, y/c$

15. $E(K(b) \wedge K(c))$ 15. $T(b = c)$ $\times$

16. $E(K(b))$ 16. $E(K(c)$

17. $T(J(b) \to K(b))$, 2. x/b 17. $T(J(c) \to K(c))$, 3. x/c

18. $E(J(b))$ $\times$ 18. $T(K(b))$ $\times$ 18. $E(J(c))$ $\times$ 18. $T(K(c))$ $\times$

2. Määritä klausuulijoukkojen

a) $\{\{\neg G(x,c)\}\}$,

b) $\{\{P(f(y),y)\}\}$,

c) $\{\{P(x)\}, \{\neg P(a), \neg P(b)\}\}$,

d) $\{\{\neg P(x,y), \neg P(y,z), G(x,z)\}\}$,

e) $\{\{\neg P(x,y)\}, \{Q(a,x), Q(b,f(y))\}\}$ ja

f) $\{\{P(x), Q(f(x,y))\}\}$

Herbrand-universumit ja kannat.

Ratk.
Herbrand-universumi U muodostuu termeistä, jotka ovat konstruoitavissa klausuulijoukossa esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista. Jos klausuulijoukossa ei ole vakiosymboleita, universumiin otetaan jokin vakiosymboli, esimerkiksi a (näin tapahtuu kohdissa (b), (d) ja (f)). Herbrand-kanta B puolestaan muodostuu atomisista lauseista, jotka ovat konstruoitavissa klausuulijoukossa esiintyvistä predikaattisymboleista käyttämällä argumentteina Herbrand-universumin U termejä.

a) $U = \{c\}, B = \{G(c,c)\}$.

b) $U = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}, B = \{P(e_1, e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\}$.

c) $U = \{a, b\}, B = \{P(a), P(b)\}$.

d) $U = \{a\}, B = \{P(a,a), G(a,a)\}$.

e) $U = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \ldots\}$,
$B = \{P(e_1, e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\} \cup \{Q(e_1, e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\}$.

f) $U = \{a, f(a,a), f(a, f(a,a)), f(f(a,a),a), f(f(a,a), f(a,a)), \ldots\}$,
$B = \{P(e) \mid e \in U\} \cup \{Q(e) \mid e \in U\}$.

3. Tarkastellaan kaavajoukkoa

$$\Sigma = \{\forall x P(x,a,x), \neg\exists x \exists y \exists z (P(x,y,z) \wedge \neg P(x, f(y), f(z)))\}$$

a) Muunna Σ klausuulijoukoksi S.

b) Anna S:n Herbrand-universumi H sekä Herbrand-kanta B.

c) Esitetään Herbrand-struktuurit Herbrand-kannan osajoukkoina. Hae S:lle osajoukkorelaatioon, $\subseteq$, nähden minimaalinen ja maksimaalinen Herbrand-malli.

4. Muunna ongelma predikaattilogiikan lauseen

$$\exists x \exists y (P(x) \leftrightarrow \neg P(y)) \rightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \wedge P(y))$$

pätevyyden selvittämisestä lauselogiikan toteutuvuusongelmaksi ja ratkaise ongelma lauselogiikan menetelmin.

5. Laadi substituutioiden $\{x/y, y/b, z/f(x)\}$ ja $\{x/g(a), y/x, w/c\}$ kompositio.

Ratk.
Substituutioita kompositoitaessa on kiinnitettävä huomiota kahteen asiaan:

– Mikäli tulos olisi muotoa x/x, sitä ei kirjata lopputulokseen.
– Jos jälkimmäinen substituutio korvaa samaa muuttujaa kuin edellinen, korvaus suoritetaan ensimmäisen substituution perusteella.

Näin saadaan:

$$\{y/b, z/f(g(a)), w/c\}$$

6. Mitkä ovat seuraavien literaalijoukkojen yleisimmät unifioijat?

a) $\{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
b) $\{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
c) $\{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
d) $\{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$

Ratk.
Sovelletaan unifikaatioalgoritmia vaiheittain:

a) $\sigma_0 = \varepsilon$ (tyhjä substituutio)
$S_0 = \{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
$D(S_0) = \{x, f(y)\}$
$\sigma_1 = \{x/f(y)\}$
$\sigma_0\sigma_1 = \{x/f(y)\}$
$S_1 = \{P(f(y), g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
$D(S_1) = \{y, f(z)\}$
$\sigma_2 = \{y/f(z)\}$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_2 = \{x/f(f(z)), y/f(z)\}$
$S_2 = \{P(f(f(z)), g(f(z)), f(a)), P(f(f(z)), g(f(z)), z)\}$
$D(S_2) = \{f(a), z\}$
$\sigma_3 = \{z/f(a)\}$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \{x/f(f(f(a))), y/f(f(a)), z/f(a)\}$
$S_3 = \{P(f(f(f(a))), g(f(f(a))), f(a))\}$
Unifiointi onnistui, yleisin unifioija on $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

b) $\sigma_0 = \varepsilon$
$S_0 = \{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
$D(S_0) = \{x, a, y\}$
$\sigma_1 = \{x/a\}$
$S_1 = \{P(a, f(a), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
$D(S_1) = \{a, y\}$
$\sigma_2 = \{y/a\}$
$S_2 = \{P(a, f(a), g(a)), P(a, f(g(a)), g(a))\}$

$D(S_2) = \{a, g(a)\}$
Termit a ja $g(a)$ eivät unifioidu; unifiointi ei siis onnistu.

c) $\sigma_0 = \varepsilon$
$S_0 = \{P(x, f(x,y)), P(y, f(y,a)), P(b, f(b,a))\}$
$D(S_0) = \{x, y, b\}$
$\sigma_1 = \{x/b\}$
$S_1 = \{P(b, f(b,y)), P(y, f(y,a)), P(b, f(b,a))\}$
$D(S_1) = \{b, y\}$
$\sigma_2 = \{y/b\}$
$S_2 = \{P(b, f(b,b)), P(b, f(b,a))\}$
$D(S_2) = \{b, a\}$
Termit b ja a eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

d) $\sigma_0 = \varepsilon$
$S_0 = \{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$
$D(S_0) = \{f(a), y, x\}$
$\sigma_1 = \{y/f(a)\}$
$S_1 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(x, f(a), f(z))\}$
$D(S_1) = \{f(a), x\}$
$\sigma_2 = \{x/f(a)\}$
$S_2 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(z))\}$
$D(S_2) = \{z, b, f(z)\}$ (z:aa ei voi korvata $f(z)$:lla)
$\sigma_3 = \{z/b\}$
$S_3 = \{P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(b))\}$
$D(S_3) = \{b, f(b)\}$
Termit b ja $f(b)$ eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

7. Osoita, että

a) substituutioiden kompositio ei ole kommutatiivinen, eli että on olemassa substituutiot σ ja λ s.e. $\sigma\lambda \neq \lambda\sigma$.

b) yleisimmät unifioijat eivät ole yksikäsitteiset, eli että jollekin lausejoukolle S on olemassa kaksi yleisintä unifioijaa, σ ja λ, s.e. $\sigma \neq \lambda$.

Ratk.

a) Olkoon $\sigma = \{x/a\}$ ja $\lambda = \{x/b\}$.

b) Lausejoukolle $S = \{P(x), P(y)\}$ saadaan yleisimmät unifioijat $\{x/y\}$ ja $\{y/x\}$.

8. Unifioi seuraava joukko.

$$\{P(x, y, z), P(f(w, w), f(x, x), f(y, y))\}$$