T-79.144 **Syksy 2002**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 7 (opetusmoniste, osa 1, kappale 8 ja osa 2, kappale 1)
30 – 31.10.2002

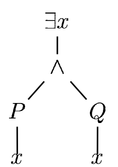
1. Ilmaise seuraavat lauseet predikaattilogiikalla:

a) Jokin porteista on viallinen.
b) Tämä algoritmi on kaikista nopein.
c) Kaikilla kurssin osanottajilla on työasema käytössään.
d) Vain yksi prosesseista voi kirjoittaa kuhunkin tiedostoon kerrallaan.

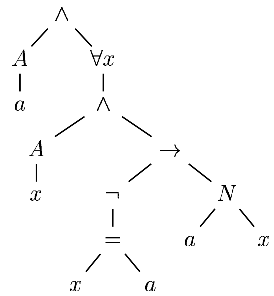
Mitä muotoa lauseet ovat? Piirrä a)- ja c)-kohtia vastaavat syntaksipuut.

Ratk.
Ratkaisussa on käytetty useaan otteeseen rajoitettuja universaali- ja eksistentiaalikvanttoreita. Jos halutaan ilmaista, että jokin ominaisuus $\phi(x)$ pätee kaikille predikaatin $P(x)$ toteuttaville alkioille x, kirjoitetaan $\forall x(P(x) \rightarrow \phi(x))$. Se, että ominaisuus $\phi(x)$ pätee jollekin predikaatin $P(x)$ toteuttavalle alkiolle x, ilmaistaan lauseella $\exists x(P(x) \wedge \phi(x))$. Tehtävässä predikaatti $P(x)$ ilmaisee usein alkion tyyppiä (esim. x on portti).

a) $\exists x(P(x) \wedge V(x))$, kun
$P(x) = x$ on portti.
$V(x) = x$ on viallinen.



b) $A(a) \wedge (\forall x(A(x) \wedge \neg(x = a) \rightarrow N(a, x))$, kun
$a =$ ko. algoritmi.
$A(x) = x$ on algoritmi.
$N(x, y) = x$ on y:tä nopeampi.



c) $\forall x(K(x) \rightarrow \exists y(T(y) \wedge R(x, y)))$, kun
$K(x) = x$ osallistuu kurssille.
$T(x) = x$ on työasema.
$R(x, y) = x$ käyttää y:tä.

d) $\forall x(T(x) \rightarrow \forall y \forall z(P(y) \wedge P(z) \wedge K(y, x) \wedge K(z, x) \rightarrow y = z))$, kun
$P(x) = x$ on prosessi.
$T(x) = x$ on tiedosto.
$K(x, y) = x$ kirjoittaa y:hyn.

Esitetyt ratkaisut eivät ole ainoita mahdollisia. Valinnan varaa on predikaatti-, funktio- ja vakiosymbolien määrittelyssä ja lauseiden rakenteessa.

2. Poista tarpeettomat sulut, ilman että lauseen merkitys muuttuu.

a) $(\forall y((\exists x(P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow L(x)))$
b) $((\exists x(\exists y(P(x, y) \vee Q(y, x)))) \leftrightarrow (\forall x(\neg K(f(x)))))$
c) $(\forall x(\forall y(A \wedge B)))$

Ratk.
Sulkujen poistamisessa käytettiin periaatetta, että uloimmat sulut voi jättää pois ja lisäksi, mikäli sulkujen sisällä oleva operaatio on presedenssiltään ulkopuolella olevaa vahvempi, sulut voidaan poistaa.

a) $\forall y((\exists x(P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow L(x))$
Tässä kaava on esitetty ilman uloimpia sulkuja. Tarkasteltaessa nyt uloimpia sulkuja, niin sisällä oleva operaatio on implikaatio ja ulkopuolella universaalinen kvantifiointi. Kvantifiointi on vahvempi, sulkuja ei voi poistaa. Tarkastellaan seuraavaksi sulkuja

eksistenttikvanttorin ympärillä. Sisällä siis em. kvantifionti ja ulkopuolella implikaatio. Sulut voi poistaa ja kaava saa muodon $\forall y(\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow L(x))$. Jäljellä on vielä sulut konjunktion ympärillä. Ulkopuolella oleva kvantifiointi on vahvempi, sulkuja ei voi poistaa.

b) $\exists x \exists y(P(x,y) \vee Q(y,x)) \leftrightarrow \forall x(\neg K(f(x)))$

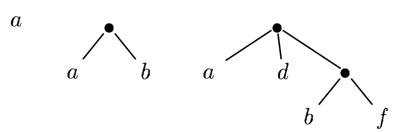
c) $\forall x \forall y(A \wedge B)$

3. Olkoon predikaattilogiikan kielessä vakiosymboli c, 1-paikkainen funktiosymboli f ja 2-paikkainen funktiosymboli g. Millaisia muuttujattomia termejä näistä voidaan muodostaa.

Ratk.
Käyttämällä ainoastaan elementtejä c ja f, voidaan muodostaa seuraava joukko termejä: $\{c, f(c), f^2(c), f^3(c), \dots\}$. Edelleen termejä voidaan laatia käyttämällä hyväksi funktiota g. Sen argumenteiksi voidaan valita mikä tahansa pari edellisistä, esim. saadaan termit $g(c,c)$ ja $g(f^3(c), f^{108}(c))$. Luonnollisesti sekä g:n että f:n argumenteiksi voidaan edelleen valita mitkä tahansa näin saaduista termeistä. Näin syntyy esim. $f(g(f^5(c), f^{13}(c)))$ ja $g(g(c, f(c)), f^8(c))$. Funktioiden sisennystä voi näin jatkaa mielivaltaisen monta askelta.

4. Luennoilla annettiin menettely binääripuiden esittämiseksi funktiosymbolien avulla. Yleistä konstruktio mielivaltaisille puille käyttämällä korkeintaan 3 vakio- ja funktiosymbolia.

Ratk.
Yleistys tapahtuu käyttämällä hyväksi sekä listojen että puiden notaatiota. Periaate on, että mielivaltainen puu esitetään sisäkkäisinä listoina, jotka kertovat kunkin solmun lapset. Olkoon tehtävässä esitetyt 3 vakio- ja funktiosymbolia e, tyhjä lista, $c \in \mathcal{F}_2$, 1. argumentti listan ensimmäinen alkio ja 2. loput listasta, ja $l \in \mathcal{F}_1$, lehtisolmu. Tarkastellaan seuraavia puita:



Näistä ensimmäinen esitetään annetulla notaatiolla muodossa $l(a)$, toinen $c(c(l(a), c(l(b), e)))$ ja kolmas saa muodon
$c(c(l(a), e),\ c(l(d), e),\ c(l(b),\ c(l(f), e)))$.

5. Osoita, että jos $\forall x \phi(x)$ on lause ja t on muuttujaton termi, niin $\phi(t)$ on lause.

Ratk.
Opetusmonisteessa todetaan, että "kaava on *lause*, jos siinä ei ole vapaita muuttujaesiintymiä". Tehtävänannossa todetaan, että $\forall x \phi(x)$ on lause. $\phi(t)$ tarkoittaa kaavaa, jossa jokainen x:n esiintymä on korvattu termillä t. Tämä operaatio voidaan tehdä, mikäli termin t sisältämä muuttuja ei syntyneessä kaavassa joudu minkään kvanttorin sitomaksi (tehtävän kaava $\phi(x)$ siis voi sisältää muita kvanttoreita). Koska t on muuttujaton, ei vaaraa ole.

Edelleen $\phi(t)$ ei olisi lause, mikäli t sisältäisi vapaita muuttujaesiintymiä. Jälleen t:n muuttujattomuus poistaa tämän mahdollisuuden ja $\phi(t)$ on myös lause.

6. Olkoon universumina $\mathbb{N}^2 = \{\langle x, y\rangle | x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$. Valitse vakiosymbolille c ja funktiosymbolille $f \in \mathcal{F}_1$ tulkinnat siten, että koko universumi tulee nimetyksi.

Ratk.
Muodostetut lukuparit voi asettaa kaksiulotteiseen taulukkoon vaikkapa seuraavasti:

$$\begin{array}{ccccc}
\langle 0,0\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,2\rangle & \langle 0,3\rangle & \cdots \\
\langle 1,0\rangle & \langle 1,1\rangle & \langle 1,2\rangle & \langle 1,3\rangle & \cdots \\
\langle 2,0\rangle & \langle 2,1\rangle & \langle 2,2\rangle & \langle 2,3\rangle & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Tehtävän idea on sama kuin todistettaessa sitä, että kahden luonnollisen luvun pareja on yhtä monta kuin luonnollisia lukuja (joukot siis ovat yhtä mahtavat). Todistuksessa laaditaan bijektiivinen kuvaus luonnollisilta luvuilta lukupareille. Kuvauksessa $f(0) = \langle 0,0\rangle$ ja muilla arvoilla se etenee aina taulukon diagonaaleja pitkin. Esim. $f(1) = \langle 0,1\rangle$, $f(2) = \langle 1,0\rangle$ jne. Mikäli kuvaus etenisi rivejä tai sarakkeita pitkin, ei joukkojen yhtäsuuruutta saataisi osoitettua, koska rivit (sarakkeet) jatkuvat äärettömiin. Mielivaltainen diagonaali puolestaan on äärellinen.

Sovellettuna logiikkaan, universumi saadaan peitettyä, mikäli vakion c tulkinta on $c^{\mathbb{N}^2} = \langle 0,0\rangle$, ja funktio laaditaan em. sääntöjen pohjalta, siis:

$$\begin{array}{rclrcl} f(c) & = & \langle 0,1\rangle & f(f(c)) & = & \langle 1,0\rangle \\ f^3(c) & = & \langle 0,2\rangle & f^4(c) & = & \langle 1,1\rangle \\ \vdots & & & \vdots & & \end{array}$$

Funktion lausekkeen voi esittää muodossa:

$$\begin{aligned} f^{\mathbb{N}^2} &: \langle x,y\rangle \to \langle x',y'\rangle \\ & x' = g(x)(y+1) + (1-g(x))(x-1) \\ & y' = (1-g(x))(y+1) \end{aligned}$$

Tässä $g(x)$ on nk. pulssifunktio:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x = 0 \\ 0, & \text{muutoin} \end{cases}$$

7. Graafi muodostuu solmujen joukosta S ja solmujen välisten kaarien $K \subseteq S \times S$ joukosta. Graafin solmuja s ja s' sanotaan vierekkäisiksi, jos niitä yhdistää kaari ($\langle s, s'\rangle \in K$). Olkoon C jokin värien joukko. Graafin *väritysongelmassa* on tarkoituksena löytää graafin solmuille värit joukosta C siten, että kaikilla vierekkäisillä solmuilla on eri värit.

a) Määrittele graafin väritysongelman ratkaisu predikaattilogiikan avulla.

b) Anna edellisen kohdan lausejoukolle malli ja

c) struktuuri, jossa se ei toteudu.

Ratk.

a) Graafista meitä kiinnostavat erityisesti kaaret, joiden esittämistä varten määritellään predikaatti $K(x,y)$ (graafissa on kaari solmusta x solmuun y). Värien esittämiseen on useita mahdollisuuksia.

(i) Yksi mahdollisuus on kiinnittää värien joukko ja esittää värit predikaatein. Jos joukossa C on värejä n kpl määritellään predikaatit $C_1(x), \ldots, C_n(n)$. Predikaatti $C_i(x)$ tarkoittaa, että solmu x on väriltään C_i. Ongelman määrittelyssä vaaditaan, että jokaisella solmulla on yksikäsitteinen väri ja että jos solmujen välillä on kaari, solmut ovat eriväriset. Ensimmäisestä vaatimuksesta saadaan lauseet

$$\forall x(C_i(x) \leftrightarrow \neg C_1(x) \wedge \cdots \wedge \neg C_{i-1}(x) \wedge \neg C_{i+1} \wedge \cdots \wedge \neg C_n(x))$$

indeksin i arvoilla $1, \ldots, n$ (huomaa, että $\neg C_i(x)$ ei esiinny ekvivalenssin oikean puolen konjuktiossa). Toinen vaatimus esitetään jokaisen predikaatin $C_i(x)$ osalta erikseen:

$$\forall x \forall y (K(x,y) \to (C_i(x) \to \neg C_i(y))).$$

(ii) Toinen mahdollisuus on jättää värien määrittely avoimeksi ja ottaa käyttöön predikaatti $V(x,y)$ (solmun x väri on y). Solmun värin yksikäsitteisyys voidaan ilmaista lauseella

$$\forall x \forall y \forall z (V(x,y) \wedge V(x,z) \to y = z).$$

Siis, jos solmulla x on värit y ja z, nämä ovat itseasiassa sama väri (yhtäsuuruus predikaatti $=$ on tosi rakenteessa $\mathcal{A}$, jos ja vain jos predikaatin argumenttien tulkinnat ovat samat rakenteessa $\mathcal{A}$). Vierekkäisten solmujen erivärisyys saadaan puettua lauseeksi

$$\forall x \forall y \forall z (K(x,y) \to (V(x,z) \to \neg V(y,z)).$$

Eli, jos graafissa on kaari solmusta x solmuun y ja solmu x on väriltään z, solmu y ei ole väriltään z.

(iii) Kolmantena mahdollisuutena on esittää väri funktiosymbolin v avulla. Termi $v(x)$ tarkoittaa solmun x väriä. Tässä tapauksessa värin yksikäsitteisyyttä ei tarvitse erikseen määritellä (funktion arvo on aina yksikäsitteinen). Erivärisyydelle saadaan lause

$$\forall x \forall y (K(x,y) \to \neg(v(x) = v(y))).$$

b) Annetaan malli kohdan (i) lauseille tapauksessa $n = 2$. Määritellään rakenne $\mathcal{A}$, jonka universumina on $A = \{a_1, a_2\}$ (kaksi solmua). Predikaatin K tulkinta on $K^{\mathcal{A}} = \{\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_1\rangle\}$ (graafissa on kaaret solmusta a_1 solmuun a_2 ja solmusta a_2 solmuun a_1). Predikaattien C_1 ja C_2 tulkinnat ovat $C_1^{\mathcal{A}} = \{a_1\}$ ja $C_2^{\mathcal{A}} = \{a_2\}$ (toinen solmuista on siis väriä C_1 ja toinen väriä C_2). Lisäksi joudumme olettamaan, että kieleen sisältyy vakiosymbolit s_1 ja s_2, joiden tulkintoina rakenteessa $\mathcal{A}$ ovat a_1 ja a_2. Tämä johtuu rakenteen määritelmästä, jossa edellytetään että kaikille universumin A alkioille a on olemassa muuttujaton termi, siten että $t^{\mathcal{A}} = a$ (jokainen universumin alkio on täten esitettävissä jollain termillä eli "nimettävissä").

Tarkistetaan nyt totuusmääritelmän avulla, että lauseet

$$\forall x(C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$$

$$\forall x \forall y (K(x,y) \rightarrow (C_1(x) \rightarrow \neg C_1(y))$$

ja

$$\forall x \forall y (K(x,y) \rightarrow (C_2(x) \rightarrow \neg C_2(y))$$

toteutuvat rakenteessa $\mathcal{A}$ (eli $\mathcal{A}$ on lauseiden malli). Huomaa että lauseista ensimmäinen on ekvivalentti lauseen

$$\forall x (C_2(x) \leftrightarrow \neg C_1(x))$$

kanssa, joka myös kuuluu lausejoukkoon tapauksessa $n = 2$. Koska s_1 ja s_2 ovat ainoat termit,

$$\mathcal{A} \models \forall x (C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$$

jos ja vain jos

$$\mathcal{A} \models (C_1(s_1) \leftrightarrow \neg C_2(s_1)) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{A} \models (C_1(s_2) \leftrightarrow \neg C_2(s_2))$$

Koska $s_1^{\mathcal{A}} \in C_1^{\mathcal{A}}$,

$$\mathcal{A} \models C_1(s_1)$$

ja koska $s_1^{\mathcal{A}} \notin C_2^{\mathcal{A}}$,

$$\mathcal{A} \not\models C_2(s_1)$$

Siis

$$\mathcal{A} \models (C_1(s_1) \leftrightarrow \neg C_2(s_1))$$

Vastaavasti osoitetaan, että $\mathcal{A} \models (C_1(s_2) \leftrightarrow \neg C_2(s_2))$, joten $\mathcal{A} \models \forall x (C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$ seuraa.

Vastaavasti

$$\mathcal{A} \models \forall x \forall y (K(x,y) \rightarrow (C_1(x) \rightarrow \neg C_1(y))$$

jos ja vain jos lauseet

$$\begin{array}{l} K(s_1,s_1) \rightarrow (C_1(s_1) \rightarrow \neg C_1(s_1)), \\ K(s_1,s_2) \rightarrow (C_1(s_1) \rightarrow \neg C_1(s_2)), \\ K(s_2,s_1) \rightarrow (C_1(s_2) \rightarrow \neg C_1(s_1)) \text{ ja} \\ K(s_2,s_2) \rightarrow (C_1(s_2) \rightarrow \neg C_1(s_2)) \end{array}$$

ovat tosia rakenteessa A. Koska parit $\langle s_1^{\mathcal{A}}, s_1^{\mathcal{A}} \rangle$ ja $\langle s_2^{\mathcal{A}}, s_2^{\mathcal{A}} \rangle$ eivät kuulu tulkintaan $K^{\mathcal{A}}$, atomiset lauseet $K(s_1,s_1)$ ja $K(s_2,s_2)$ ovat epätosia rakenteessa $\mathcal{A}$, joten implikaation totuusmääritelmän perusteella edellä annetuista neljästä lauseesta ensimmäinen ja viimeinen ovat tosia rakentessa $\mathcal{A}$. Koska pari $\langle s_1^{\mathcal{A}}, s_2^{\mathcal{A}} \rangle$ kuuluu tulkintaan $K^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \models K(s_1,s_2)$ ja lauseista toinen on tosi rakenteessa $\mathcal{A}$, jos ja vain jos $\mathcal{A} \models C_1(s_1) \rightarrow \neg C_1(s_2)$. Tämä pitää paikkansa, sillä $s_1^{\mathcal{A}} \in C_1^{\mathcal{A}}$ ja $s_2^{\mathcal{A}} \notin C_1^{\mathcal{A}}$, joten $\mathcal{A} \models C_1(s_1)$ ja $\mathcal{A} \models \neg C_1(s_2)$. Myös kolmas lause toteutuu. Erona edelliseen on, että implikaatio $C_1(s_2) \rightarrow \neg C_1(s_1)$ on tosi rakenteessa $\mathcal{A}$, koska $\mathcal{A} \not\models C_1(s_2)$. Siis $\mathcal{A}$ on malli lauseelle $\forall x \forall y (K(x,y) \rightarrow (C_1(x) \rightarrow \neg C_1(y))$.

Symmetriasyistä $\mathcal{A}$ on myös lauseen $\forall x \forall y (K(x,y) \rightarrow (C_2(x) \rightarrow \neg C_2(y))$ malli. Olemme siis osoittaneet, että $\mathcal{A}$ on lausejoukon malli. Sama rakenne on malli myös tapauksessa, jossa värejä on useampia kuin kaksi.

Malleista tulee monimutkaisempia, jos solmujen väritys esitetään vaihtoehtojen (ii) ja (iii) mukaisesti.

c) Määritellään rakenne $\mathcal{A}$ tapauksessa $n = 2$, jossa lausejoukko ei toteudu. Valitaan universumiksi $A = \{a\}$ (yksi solmu) ja predikaatin K tulkinnaksi esim. $K^{\mathcal{A}} = \{\langle a, a \rangle\}$. Olkoon s vakiosymboli, jonka tulkintana on a. Nyt

$$\forall x (C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$$

ei toteudu rakenteessa $\mathcal{A}$, jos

$$\mathcal{A} \not\models C_1(s) \leftrightarrow \neg C_2(s)$$

Valitaan siis väripredikaattien tulkinnat siten, että

$$\mathcal{A} \models C_1(s) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{A} \models C_2(s)$$

asettamalla

$$C_1^{\mathcal{A}} = C_2^{\mathcal{A}} = \{a\}$$

Tällöin $\mathcal{A}$ ei voi olla lausejoukon malli.

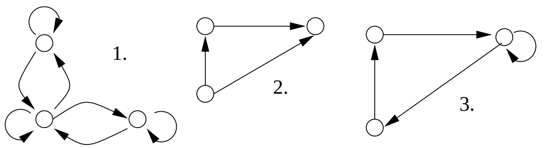
T-79.144 **Syksy 2002**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 8 (opetusmoniste, kappaleet 2.1 - 3.2)
6 – 9.11.2002

1. Olkoon R kaksipaikkainen predikaattisymboli, jonka tulkintana on relaatio $R^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$ (joukko A on struktuurin $\mathcal{A}$ universumi). Alla on taulukko lauseista, jotka määrittelevät relaatiolle $R^{\mathcal{A}}$ erilaisia ominaisuuksia.

Ominaisuus	Määritelmä
refleksiivisyys	$\forall x R(x,x)$
irrefleksiivisyys	$\forall x \neg R(x,x)$
symmetrisyys	$\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$
asymmetrisyys	$\forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x))$
transitiivisyys	$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z))$
sarjallisuus	$\forall x \exists y R(x,y)$

Olkoon universumi A kaikkien ihmisten joukko. Anna esimerkkejä relaatioista $R^{\mathcal{A}}$, $(\emptyset \subset R^{\mathcal{A}} \subset A^2)$, joilla on yllä määriteltyjä ominaisuuksia.

Allaolevat kolme graafia pyrkivät selventämään eri relaatioiden ominaisuuksia. Tässä solmut ovat struktuurin alkioita, ja solmuja yhdistää kaari, mikäli $R(x,y)$ on tosi, kun $x \in A, y \in A$. Loogisia rakenteita havainnollistetaan aina silloin tällöin niitä vastaavien graafien avulla.



Refleksiivisyys ($\forall x R(x,x)$) tarkoittaa sitä, että graafin kaikista solmuista on kaari takaisin itseensä, ja irrefleksiivisyys ($\forall x \neg R(x,x)$) vastaavasti sitä, että yhdessäkään solmussa ei ole itseään osoitavaa kaarta. Graafeista ensimmäinen on refleksiivinen, toinen irrefleksiivinen ja kolmas ei ole kumpaakaan.

Symmetrisyys ($\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$) tarkoittaa sitä, että aina mikäli solmusta x on kaari solmuun y, graafissa on myös kaari y:stä x:ään. Asymmetrisellä ($\forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x))$) graafilla ei ole yhtään paluukaarta. Kuvan graafeista 1. on symmetrinen, 2. asymmetrinen ja 3. ei kumpaakaan.

Transitiivisessa graafissa ($\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z))$) pätee, että mikäli solmusta x päästään kaaria seuraamalla (mahdollisesti muiden solmujen kautta) solmuun y, pääsee solmusta x myös suoraan solmuun y. Kuvan graafeista ainoastaan keskimmäinen on transitiivinen.

Graafin sarjallisuus ($\forall x \exists y R(x,y)$) tarkoittaa sitä, että kaikista solmuista lähtee ainakin yksi kaari. Kuvan graafeista ensimmäinen ja viimeinen ovat sarjallisia.

Ominaisuuksien ihmisten joukossa tapahtuvaa tarkastelua varten määritellään seuraavat relaatiot: $T(x,y)$ (x tuntee y:n), $N(x,y)$ (x on naimisissa y:n kanssa), $V(x,y)$ (y on x:n vanhempi) ja $E(x,y)$ (y on x:n esi-isä). Nämä relaatiot toteuttavat ominaisuuksia seuraavan taulukon mukaisesti.

Relaatio	refl.	irrefl.	symm.	asymm.	trans.	sarj.
tuttu	*		*			*
aviopuoliso		*	*			
vanhempi		*		*		*
esi-isä		*		*	*	*

Koska ihminen tuntee itsensä, ja tutut tuntevat toisensa, on $T(x,y)$ refleksiivinen, symmetrinen ja sarjallinen. Aviopuolisot ovat naimisissa toistensa kanssa, eikä kukaan voi olla naimisissa itsensä kanssa, joten $N(x,y)$ on irrefleksiivinen ja symmetrinen. Vanhemmuus on irrefleksiivinen, asymmetrinen (kukaan ei voi olla oma isovanhempansa) ja sarjallinen (kaikilla on vanhemmat). Esi-isä –relaatio on kuten vanhemmuus, mutta sen lisäksi myös transitiivinen, koska jos Kalle on Pekan esi-isä, ja Pekka Juhan, niin Kalle on myös Juhan esi-isä.

2. Tiedetään, että

(i) kaikki syylliset ovat valehtelijoita,

(ii) ainakin yksi syytetyistä on myös todistaja ja

(iii) yksikään todistaja ei valehtele.

Todista, etteivät kaikki syytetyt ole syyllisiä. Käytä semanttista taulua.

Olkoon predikaatit $G(x)$ (x on syyllinen), $L(x)$ (x on valehtelija), $A(x)$ (x on syytetty) ja $W(x)$ (x on todistaja). Premissit ovat nyt $\forall x (G(x) \to L(x))$, $\exists x (A(x) \land W(x))$ ja $\forall x (W(x) \to \neg L(x))$. Haluttu johtopäätös on $\neg \forall x (A(x) \to G(x))$. Taulutodistus on seuraavanalainen.

$$
\begin{array}{c}
T(\forall x(G(x) \to L(x))) \\
T(\exists x(A(x) \land W(x))) \\
T(\forall x(W(x) \to \neg L(x))) \\
F(\neg\forall x(A(x) \to G(x))) \\
| \\
T(\forall x(A(x) \to G(x))) \\
| \\
T(A(a) \land W(a)) \\
| \\
T(A(a)) \\
T(W(a)) \\
| \\
T(A(a) \to G(a))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
F(A(a)) & T(G(a)) \\
\otimes & | \\
 & T(W(a) \to \neg L(a))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
F(W(a)) & T(\neg L(a)) \\
\otimes & | \\
 & F(L(a)) \\
 & | \\
 & T(G(a) \to L(a))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
F(G(a)) & T(L(a)) \\
\otimes & \otimes
\end{array}
$$

3. Tiedetään, että

1) jos tiili on toisen tiilen päällä, se ei ole pöydällä
2) jokainen tiili on pöydällä tai toisen tiilen päällä ja
3) yksikään tiili ei ole sellaisen tiilen päällä, joka edelleen on jonkun tiilen päällä.

Todista semanttisella taululla, että jos tiili on toisen tiilen päällä, niin jälkimmäisen on oltava pöydällä.

Ratk.
Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja:

$$
\begin{aligned}
T(x,y) &= \text{“tiili } x \text{ on tiilen } y \text{ päällä” ja} \\
P(x) &= \text{“tiili } x \text{ on pöydällä”.}
\end{aligned}
$$

Premissijoukko on formalisoituna seuraavanlainen:

$$
\{\forall x\,(\exists y\,T(x,y) \to \neg P(x)),\ \forall x\,(P(x) \lor \exists y\,T(x,y)),\ \forall x \forall y\,(\exists z\,T(y,z) \to \neg T(x,y))\}
$$

Haluttu johtopäätös on

$$
\forall x \forall y\,(T(x,y) \to P(y))
$$

Taulutodistus:

$$
\begin{array}{c}
1.\ T(\forall x(\exists y T(x,y) \to \neg P(x))) \\
| \\
2.\ T(\forall x(P(x) \lor \exists y T(x,y))) \\
| \\
3.\ T(\forall x \forall y(\exists z T(y,z) \to \neg T(x,y))) \\
| \\
4.\ E(\forall x \forall y(T(x,y) \to P(y))) \\
| \\
5.\ E(\forall y(T(c,y) \to P(y))),\ 4.\ x/c \\
| \\
6.\ E(T(c,d) \to P(d)),\ 5.\ y/d \\
| \\
7.\ T(c,d),\ 6. \\
| \\
8.\ E(d),\ 6. \\
| \\
9.\ T(P(d) \lor \exists y T(d,y))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
10.\ T(P(d)),\ 9. & 10.\ T(\exists y T(d,y)),\ 9. \\
\otimes & | \\
 & 11.\ T(d,e),\ 10.\ y/d \\
 & | \\
 & 12.\ T(\exists z T(d,z) \to \neg T(c,d)),\ 3.\ x/c, y/d
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
13.\ E(\exists z T(d,z)),\ 12. & 13.\ T(\neg T(c,d)),\ 12. \\
| & | \\
14.\ E(T(d,e)),\ 13.\ z/e & 14.\ E(T(c,d)),\ 13. \\
\otimes & \otimes
\end{array}
$$

4. Tutki semanttisella taululla:

a) $\{\forall x \exists y(P(x) \to Q(y)), \forall x P(x)\} \models \forall x Q(x)$.

b) $\{\forall x \forall y(\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)) \to R(x,y)), R(a,b), R(b,a)\} \models R(a,a)$.

c) $\models \forall x \exists y R(x,y) \to (\forall y(\neg S(y) \to \neg \exists x R(x,y)) \to \exists x S(x))$.

Ratk.

a)

1. $T(\forall x \exists y(P(x) \to Q(y)))$
2. $T(\forall x P(x))$
3. $E(\forall x Q(x))$
4. $E(Q(c))$ 3. x/c
5. $T(P(c))$ 2. x/c
6. $T(\exists y(P(c) \to Q(y)))$ 1. x/c
7. $T(P(c) \to Q(d))$ 6. y/d

8. $E(P(c))$ 7. $\otimes$ 8. $T(Q(d))$ 7.

9. $T(P(d))$ 2. x/d

Taulu näyttää jäävän auki. Tätä voidaan perustella sillä, että aina kun predikaatti Q tulee instantioida, pitää se tehdä uudella vakiolla. Ristiriita edellyttäisi samaa vakiota totena ja epätotena. Avoimesta haarasta voidaan lukea vastaesimerkki, $\mathcal{A} = \{1,2\}, c^{\mathcal{A}} = 1,\ d^{\mathcal{A}} = 2,\ P^{\mathcal{A}} = \{1,2\},\ Q^{\mathcal{A}} = \{2\}$.

b)

1. $T(\forall x \forall y(\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)) \to R(x,y)))$
2. $T(R(a,b))$
3. $T(R(b,a))$
4. $E(R(a,a))$
5. $T(\exists z(R(a,z) \wedge R(z,a)) \to R(a,a))$, 1. $x/a, y/a$
6. $T(R(a,b) \wedge R(b,a) \to R(a,a))$, 5. z/b

7. $E(R(a,b) \wedge R(b,a))$, 6. 7. $T(R(a,a))$, 6. $\otimes$

8. $E(R(a,b))$, 7. $\otimes$ 8. $E(R(b,a))$, 7. $\otimes$

Kaikki haarat ristiriitaisia, esitetty väite pätee.

5. Osoita, että seuraavat lauseet eivät ole päteviä konstruoimalla struktuuri, jossa lause on epätosi (vastamalli).

a) $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$

b) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \to \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

c) $\neg \forall x(P(x) \to R(x)) \vee \neg \forall x(P(x) \to \neg R(x))$

Ratk.

a) Olkoon $\mathcal{A} = \{1,2\}$ ja $P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$. Nyt $\forall x \exists y P(x,y)$ pätee (kummallekin alkiolle 1. positiossa löytyy vastine). Toisaalta $\exists y \forall x P(x,y)$ ei päde koska ei ole predikaatin tulkinnassa ei ole sellaista alkiota 2. positiossa, jolle löytyisi parit siten, että molemmat alkiot esiintyisivät 1. positiossa. Näin ollen implikaatio on epätosi.

b) Olkoon $\mathcal{A} = \{1\}$ ja $P^{\mathcal{A}} = \{1\}, Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$. Nyt implikaation vasen puoli on tosi ja oikea epätosi ja struktuuri näin vastaesimerkki.

c) Lauseessa pitäisi saada disjunktio epätodeksi. Tämä edellyttää, että molemmat argumentit ovat epätosia. Koska niiden edessä on negaatio, pitää siis molemmilla puolilla negaatioiden sisällä oleva osuus olla tosi.
Olkoon $\mathcal{A} = \{1\}$ ja $P^{\mathcal{A}} = \emptyset, R^{\mathcal{A}} = \{1\}$. Nyt $\forall x(P(x) \to R(x))$ on tosi, koska sen vasen puoli on epätosi. Samalla argumentilla $\forall x(P(x) \to \neg R(x))$ on tosi. Näiden vaatimusten voidaan ajatella kuvaavan osajoukkorelaatiota. Ensimäisessä tapauksessa P:n tulkinnan tulisi olla R:n tulkinnan osajoukko ja toisessa R:n tulkinnan komplementin osajoukko. Ainoa joukko, joka molemmat vaatimukset täyttää on tyhjä joukko, joka siis on asetettu P:n tulkinnaksi.

T-79.144 **Syksy 2002**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 9 (opetusmoniste, kappaleet 3.1 - 5.4)
13 – 16.11.2002

1. *Suunnattu* graafi koostuu joukosta solmuja ja solmujen välisistä *suunnatuista* kaarista. Oletetaan, että solmut on esitetty vakiosymbolien $\{a, b, \ldots\}$ avulla ja kaaret kaksipaikkaisen predikaatin $K(x, y) =$ "solmusta x on kaari solmuun y" avulla.

1. Määrittele predikaatit $R_n(x, y) =$ "solmusta x on kaarien suuntainen reitti solmuun y siten, että reitillä on n kappaletta kaaria", kun n saa arvot $0, 1, 2, \ldots, k$. Kuvaa allaoleva graafi käyttäen predikaattia K.

$$a \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} b \longrightarrow c$$

2. Osoita semanttisella taululla, että laatimastasi kuvauksesta sekä predikaattien R_2 ja R_3 määritelmistä seuraa loogisesti

$$\exists x(R_2(x, x) \wedge R_3(x, c)).$$

Ratk.

a) Määritellään predikaatit $R_n(x, y)$ seuraavasti:

$$\forall x R_0(x, x)$$
$$\forall x \forall y \forall z(R_0(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_1(x, z))$$
$$\forall x \forall y \forall z(R_1(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_2(x, z))$$
$$\vdots$$
$$\forall x \forall y \forall z(R_{k-1}(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_k(x, z))$$

Säännöt siis tarkoittavat, että kaikista solmuista on nollan askeleen mittainen reitti itseensä, ja mikäli solmusta x on $k-1$:n askeleen mittainen reitti solmuun y ja solmusta y on kaari solmuun z, voidaan kyseinen kaari liittää reitin jatkoksi ja saada k:n askeleen reitti solmusta x solmuun z.

Graafi:

$$a \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} b \longrightarrow c$$

voidaan esittää kaarirelaation avulla seuraavasti:

$$K(a, b)$$
$$K(b, a)$$
$$K(b, c)$$

b) Ennen taulutodistuksen laadintaa kannattaa miettiä, mitä kysely tarkoittaa, ja tekemällä todistuksen sen pohjalta. Kyselyssä väitetään, että on olemassa solmu, josta lähtee kahden askeleen mittainen silmukka takaisin itseensä, ja josta pääsee kolmella askeleella solmuun c. Tarkastelemalla graafia huomataan, että solmu b täyttää tämän ehdon. Todistus etenee siten seuraavasti:

1. Todistetaan, että solmusta b on yhden askeleen pituinen reitti solmuun a.
2. Todistetaan, että solmusta b on kahden askeleen pituinen reitti takaisin itseensä.
3. Todistetaan, että solmusta b on kolmen askeleen pituinen reitti solmuun c.

Mikäli tätä strategiaa ei noudata, todistuksesta voi tulla huomattavan hankala.

1. $T(\forall x R_0(x, x))$
2. $T(\forall x \forall y \forall z(R_0(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_1(x, z)))$
3. $T(\forall x \forall y \forall z(R_1(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_2(x, z)))$
4. $T(\forall x \forall y \forall z(R_2(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_3(x, z)))$
5. $T(K(a, b))$
6. $T(K(b, a))$
7. $T(K(b, c))$
8. $E(\exists x(R_2(x, x) \wedge R_3(x, c)))$
9. $E(R_2(b, b) \wedge R_3(b, c))$, 8. x/b
10. $T(R_0(b, b) \wedge K(b, a) \rightarrow R_1(b, a))$, 2. $x/b, y/b, z/a$

11. $E(R_0(b, b) \wedge K(b, a))$, 10. | 11. $T(R_1(b, a))$, 10.

12. $E(R_0(b, b))$, 1. $\otimes$ | 12. $E(K(b, a))$, 1. $\otimes$

Tarkastellaan asemointisyistä alipuuta solmusta 11 erikseen.

$11.\ T(R_1(b,a))$

$12.\ T(R_1(b,a) \wedge K(a,b) \rightarrow R_2(b,b)), 3. x/b, y/a, z/b$

$13.\ E(R_1(b,a) \wedge K(a,b)), 12.$ $\qquad$ $13.\ T(R_2(b,b)), 12.$

$12.\ E(R_1(b,a)), 13.$ $\otimes$ $\qquad$ $12.\ E(K(a,b)), 13.$ $\otimes$ $\qquad$ $14.\ T(R_2(b,b) \wedge K(b,c) \rightarrow R_3(b,c)), 3.\ x/b, y/b, z/c$

$15.\ E(R_2(b,b) \wedge K(b,c)),\ 14.$ $\qquad$ $15.\ T(R_3(b,c)),\ 14.$

$16.\ E(R_2(b,b)),\ 15.$ $\otimes$ $\qquad$ $16.\ E(K(b,c)),\ 15.$ $\otimes$

Tarkastellaan lopuksi solmun 15 alipuuta.

$T(R_3(b,c))$

$E(R_2(b,b)),\ 9.$ $\otimes$ $\qquad$ $E(R_3(b,c)),\ 9.$ $\otimes$

Koko taulu saatiin ristiriitaikseksi ja looginen seuraavuus täten osoitettua.

2. Tutki semanttisella taululla:

a) $\{\forall x \exists y(P(x) \rightarrow Q(y)), \forall x P(x)\} \models \forall x Q(x)$.

b) $\{\forall x \forall y(\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)) \rightarrow R(x,y)), R(a,b), R(b,a)\} \models R(a,a)$.

c) $\{\forall x \forall y(R(x,y) \rightarrow R(y,x)), R(a,b)\} \models R(a,a)$

d) $\models \forall x \exists y R(x,y) \rightarrow (\forall y(\neg S(y) \rightarrow \neg \exists x R(x,y)) \rightarrow \exists x S(x))$.

Ratk.

Tehtävä on muutoin sama kuin laskuharjoitus 8:ssa, mutta c-kohta on lisätty.

c) Tarkastelussa kannattaa jälleen miettiä, mitä lausejoukon lauseet tarkoittavat. Kvantifioitu lause näyttäisi määrittelevän symmetriaskeeman ja vakioitu lause antavan yhden relaation R instanssin. Kysely ei kuitenkaan ole annetulle instanssille symmetrinen (vrt. tehtävä, jos olisi $R(b,a)$), joten taulu jäänee auki.

$1.\ T(\forall x \forall y(R(x,y) \rightarrow R(y,x)))$

$2.\ T(R(a,b))$

$3.\ E(R(a,a))$

$4.\ T(R(a,b) \rightarrow R(b,a)),\ 1.\ x/a,\ y/b$

$5.\ E(R(a,b))$ $\otimes$ $\qquad$ $5.\ T(R(b,a))$

$6.\ T(R(a,a) \rightarrow R(a,a)),\ 1.\ x/a,\ y/a$

$7.\ E(R(a,a)),\ 6.$ $\qquad$ $7.\ T(R(a,a)),\ 6.$ $\otimes$

$8.\ T(R(b,a) \rightarrow R(a,b)),\ 1.\ x/b,\ y/a$

$9.\ E(R(b,a)), 8.$ $\otimes$ $\qquad$ $9.\ T(R(a,b)), 8.$

$10.\ T(R(b,b) \rightarrow R(b,b)),\ 1.\ x/b,\ y/b$

$11.\ E(R(b,b)),\ 10.$ $\qquad$ $11.\ T(R(b,b)),\ 10.$

Taulu tuli valmiiksi, universaalisti kvantifioitu lause on instantioitu kaikilla vakioiden a, b kombinaatioilla, mutta ristiriitaa ei saatu johdettua. Itse asiassa vastaesimerkkejä on 2. Tarkastellaan oikeanpuolimmaista avointa haaraa, joka päättyy solmuun $T(R(b,b))$. Haaralle saadaan struktuuri $\mathcal{A} = \{1,2\}, a^{\mathcal{A}} = 1, b^{\mathcal{A}} = 2, R^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$, joka asettaa premissit todeksi, mutta oletetun seurauksen epätodeksi.

3. Muunna seuraavat lauseet konjunktiiviseen normaalimuotoon ja suorita skolemointi.

a) $\forall y(\exists x P(x,y) \rightarrow Q(y,z)) \wedge \exists y(\forall x R(x,y) \vee Q(x,y))$.

b) $\exists x R(x,y) \leftrightarrow \forall y P(x,y)$.

c) $\forall x \exists y Q(x,y) \vee \exists x \forall y P(x,y) \wedge \neg \exists x \exists y P(x,y)$.

d) $\neg(\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists x \exists y R(x,y)) \wedge \forall x \neg \exists y Q(x,y)$.

Ratk.

Muunnettaessa predikaattilogiikan lauseita normaalimuotoihin, tuli noudattaa seuraavaa algoritmia:

- Poistetaan konnektiivit $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$.
- Negaatiot sisään kvanttorit ulos.

– Distribuutiosäännöillä haluttu lopullinen muoto (KNM tai DNM).

a)

$$
\begin{aligned}
&\forall y(\exists x P(x,y) \to Q(y,z)) \wedge \exists y(\forall x R(x,y) \vee Q(x,y)) \\
\equiv&\forall y(\neg\exists x P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge \exists y(\forall x R(x,y) \vee Q(x,y)) \\
\equiv&\forall y(\forall x \neg P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge \exists y(\forall x R(x,y) \vee Q(x,y)) \\
\equiv&\exists y_1(\forall y(\forall x \neg P(x,y) \vee Q(y,z)) \wedge (\forall x R(x,y_1) \vee Q(x,y_1))) \\
\equiv&\exists y_1 \forall y_2((\forall x \neg P(x,y_2) \vee Q(y_2,z)) \wedge (\forall x R(x,y_1) \vee Q(x,y_1))) \\
\equiv&\exists y_1 \forall y_2 \forall x_1 \forall x_2((\neg P(x_1,y_2) \vee Q(y_2,z)) \wedge (R(x_2,y_1) \vee Q(x,y_1)))
\end{aligned}
$$

Nyt havaitaan, että kvanttoreita sisältämätön osa on KNM:n edellyttämää muotoa. Skolemoinnissa uloimmat eksistenssikvanttorit korvataan vakioilla, ja universaalikvanttoreiden sisällä olevat Skolemfunktioilla. Tässä saadaan seuraava lause:

$$\forall y_2 \forall x_1 \forall x_2((\neg P(x_1,y_2) \vee Q(y_2,z)) \wedge (R(x_2,c) \vee Q(x,c)))$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\forall x \exists y Q(x,y) \vee \exists x \forall y P(x,y) \wedge \neg\exists x \exists y P(x,y)) \\
\equiv&\forall x \exists y Q(x,y) \vee \exists x \forall y P(x,y) \wedge \forall x \forall y \neg P(x,y) \\
\equiv&\exists x_1 \forall x_2(\exists y Q(x_2,y) \vee \forall y P(x_1,y) \wedge \forall x \forall y \neg P(x_1,y)) \\
\equiv&\exists x_1 \forall x_2 \exists y_1(Q(x_2,y_1) \vee \forall y P(x_1,y) \wedge \forall x \forall y \neg P(x_1,y)) \\
\equiv&\exists x_1 \forall x_2 \exists y_1 \forall y_2 \forall y_3(Q(x_2,y_1) \vee (P(x_1,y_2) \wedge \neg P(x_1,y_3)))
\end{aligned}
$$

Lause on nyt nk. Prenex-normaalimuodossa, josta voidaan jatkaa konjunktiiviviseen normaalimuotoon.

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists y_1 \forall y_2 \forall y_3((Q(x_2,y_1) \vee P(x_1,y_2)) \wedge (Q(x_2,y_1) \vee \neg P(x_1,y_3)))$$

Skolemoinnissa x_1 korvataan vakiolla ja y_1 lausutaan x_2:n funktiona.

$$\forall x_2 \forall y_2 \forall y_3((Q(x_2,f(x_2)) \vee P(c,y_2)) \wedge (Q(x_2,f(x_2)) \vee \neg P(x_1,y_3)))$$

4. Muunna seuraavat lauseet klausuulimuotoon:

a) $\neg\exists x((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$,

b) $\forall y \exists x P(x,y)$,

c) $\neg\forall y \exists x G(x,y)$ ja

d) $\exists x \forall y \exists z(P(x,z) \vee P(z,y) \to G(x,y))$.

Ratk.

a) Lause $\neg\exists x((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$:
Eliminoidaan implikaatiot: $\neg\exists x((\neg P(x) \vee P(a)) \wedge (\neg P(x) \vee P(b)))$
Viedään $\neg$ kvanttorin $\exists x$ sisään:
$\forall x \neg((\neg P(x) \vee P(a)) \wedge (\neg P(x) \vee P(b)))$
Viedään negaatiot lausekkeiden sisään:
$\forall x((P(x) \wedge \neg P(a)) \vee (P(x) \wedge \neg P(b)))$
Tuodaan $P(x)$ ulos: $\forall x(P(x) \wedge (\neg P(a) \vee \neg P(b)))$
Jätetään universaalikavanttorit pois: $P(x) \wedge (\neg P(a) \vee \neg P(b))$
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{P(x)\},\ \{\neg P(a),\ \neg P(b)\}\}$

b) Lause $\forall y \exists x P(x,y)$:
Skolemointi: $\forall y P(f(y),y)$
Jätetään universaalikavanttorit pois: $P(f(y),y)$
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{P(f(y),y)\}\}$

c) Lause $\neg\forall y \exists x G(x,y)$:
Viedään $\neg$ kvanttorin $\forall y$ sisään: $\exists y \neg\exists x G(x,y)$
Viedään $\neg$ kvanttorin $\exists x$ sisään: $\exists y \forall x \neg G(x,y)$
Skolemointi: $\forall x \neg G(x,c)$
Jätetään universaalikavanttorit pois: $\neg G(x,c)$
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{\neg G(x,c)\}\}$

d) Lause $\exists x \forall y \exists z(P(x,z) \vee P(z,y) \to G(x,y))$:
Eliminoidaan implikaatio: $\exists x \forall y \exists z(\neg(P(x,z) \vee P(z,y)) \vee G(x,y))$
Viedään negaatiot lausekkeen sisään:
$\exists x \forall y \exists z((\neg P(x,z) \wedge \neg P(z,y)) \vee G(x,y))$
Viedään $G(x,y)$ lausekkeen sisään:
$\exists x \forall y \exists z((\neg P(x,z) \vee G(x,y)) \wedge (\neg P(z,y) \vee G(x,y)))$
Skolemointi: $\forall y \exists z((\neg P(c,z) \vee G(c,y)) \wedge (\neg P(z,y) \vee G(c,y)))$
Skolemointi: $\forall y((\neg P(c,f(y)) \vee G(c,y)) \wedge (\neg P(f(y),y) \vee G(c,y)))$
Jätetään universaalikvanttorit pois:
$(\neg P(c,f(y)) \vee G(c,y)) \wedge (\neg P(f(y),y) \vee G(c,y))$
Muodostetaan klausuuliesitys:
$\{\{\neg P(c,f(y)),\ G(c,y)\},\ \{\neg P(f(y),y),\ G(c,y)\}\}$

5. Johda muista kvanttorisäännöistä säännöt, joilla kvanttorit $\forall x$ ja $\exists x$ tuoda allaolevista lausemuodoista ulos, s.e. sulkujen sisälle jäävä alikaava säilyy muodoltaan implikaationa.

a) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\forall x \phi(x) \rightarrow \psi)$

b) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\exists x \phi(x) \rightarrow \psi)$

c) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\phi \rightarrow \forall x \psi(x))$

d) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\phi \rightarrow \exists x \psi(x))$

Ratk.
Tehtävässä sovelletaan jo aikaisemmin tutuksi käyneitä normaalimuotosääntöjä.

a)

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Q}\vec{y}\ (\forall x \phi(x) \rightarrow \psi) \\
\equiv &\mathcal{Q}\vec{y}\ (\neg \forall x \phi(x) \lor \psi) \\
\equiv &\mathcal{Q}\vec{y}\ (\exists x \neg \phi(x) \lor \psi) \\
\equiv &\mathcal{Q}\vec{y}\ \exists x_1 (\neg \phi(x_1) \lor \psi) \\
\equiv &\mathcal{Q}\vec{y}\ \exists x_1 (\phi(x_1) \rightarrow \psi)
\end{aligned}
$$

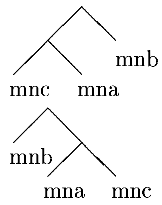
c)

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Q}\vec{y}\ (\phi \rightarrow \forall x \psi(x)) \\
\equiv &\mathcal{Q}\vec{y}\ (\neg \phi \lor \forall x \psi(x)) \\
\equiv &\mathcal{Q}\vec{y}\ \forall x_1 (\neg \phi \lor \psi(x_1)) \\
\equiv &\mathcal{Q}\vec{y}\ \forall x_1 (\neg \phi \rightarrow \psi(x_1))
\end{aligned}
$$

Säännönmukaisuutena voidaan havaita, että mikäli kvantifiointi on implikaation vasemmalla puolella, muuttuu kvanttori. Oikealla puolella se säilyy.

T-79.144 **Syksy 2002**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 10 (opetusmoniste, kappaleet 6 – 7)
20 – 23.11.2002

1. Esitetään binääripuut kaksipaikkaisen funktiosymbolin s (sisäsolmut) ja yksipaikkaisen funktiosymbolin l (lehtisolmut) avulla. Näin oheisen kuvan ylempi puu saa termiesityksen $s(s(l(c), l(a)), l(b))$.



a) Tarkoittakoon predikaatti PK(x, y), että binääripuu x on binääripuun y peilikuva. Määrittele predikaatti PK predikaattilogiikan lausein siten, että pystyt päättelemään, ovatko mitkä tahansa kaksi yllä annetun esitystavan mukaista binääripuuta toistensa peilikuvia.

b) Osoita semanttisella taululla, että ylempi binääripuu on alemman binääripuun peilikuva.

Ratk.
Määritellään predikaatti PK seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
&\forall x PK(l(x), l(x)) \\
&\forall x \forall y \forall v \forall w (PK(x, v) \land PK(y, w) \rightarrow PK(s(x, y), s(w, v)))
\end{aligned}
$$

Siis:

- lehtisolmut ovat itsensä peilikuvia
- sisäsolmut $s(x, y)$ käsitellään siten, että ensin muodostetaan alipuiden x ja y peilikuvat ja sitten nämä liitetään yhteen käänteiseen järjestykseen $s(w, v)$.

Todistetaan näillä lauseilla, että:

$$PK(s(s(l(c), l(a)), l(b)), s(l(b), s(l(a), l(c))))$$

$$T(\forall x PK(l(x), l(x)))$$
$$T(\forall x \forall y \forall v \forall w (PK(x,v) \land PK(y,w) \to PK(s(x,y), s(w,v))))$$
$$E(PK(s(s(l(c), l(a)), l(b)), s(l(b), s(l(a), l(c)))))$$
$$T(PK(l(a), l(a)))$$
$$T(PK(l(b), l(b)))$$
$$T(PK(l(c), l(c)))$$
$$T(PK(l(c), l(c)) \land PK(l(a), l(a)) \to PK(s(l(c), l(a)), s(l(a), l(c))))$$
$$E(PK(l(c), l(c)) \land PL(l(a), l(a))) \qquad T(PK(s(l(c), l(a)), s(l(a), l(c))))$$
$$\underset{\otimes}{E(PK(l(c), l(c)))} \qquad \underset{\otimes}{E(PK(l(a), l(a)))}$$

Tarkastellaan oikeaa haaraa erikseen:

$$T(PK(s(l(c), l(a), s(l(a), l(c))))$$
$$T(PK(s(l(c), l(a), s(l(a), l(c))) \land PK(l(b), l(b)) \to PK(s(s(l(c), l(a), l(b)), s(l(b), s(l(a), l(c)))))$$
$$E(PK(s(l(c), l(a), s(l(a), l(c))) \land PK(l(b), l(b))) \qquad \underset{\otimes}{T(PK(s(s(l(c), l(a), l(b), s(l(b), s(l(a), l(c)))))}$$
$$\underset{\otimes}{F(PK(s(l(c), l(a), s(l(a), l(c)))))} \qquad \underset{\otimes}{F(PK(l(b), l(b)))}$$

Puusta tuli ristiriitainen, joten esitetty lause on PK:n määritelmän looginen seuraus.

2. Kvanttorilla $\exists! x$ tarkoitetaan, että “on olemassa vain yksi x”. Väittämä $\exists! x\, \phi(x)$ voidaan ilmaista predikaattilogiikan lauseella

$$(\exists x \phi(x)) \land (\forall x \forall y (\phi(x) \land \phi(y) \to x = y)).$$

Formalisoi seuraavat lauseet predikaattilogiikalla:

1. On vain yksi kuuraparta.
2. Kaikki joulupukit ovat kuurapartoja.
3. Kaikki kuuraparrat ovat joulupukkeja.

---

4. On vain yksi joulupukki.

Osoita semanttisella taululla, että lause 4 on lauseiden 1-3 looginen seuraus.

Ratk.
Tarkoittakoon predikaatti $K(x)$, että x on kuuraparta ja predikaatti $J(x)$, että x on joulupukki. Näistä lähtökohdista lauseet voidaan formalisoida seuraavasti:

- $\exists x K(x) \land \forall x \forall y (K(x) \land K(y) \to x = y)$
- $\forall x (J(x) \to K(x))$
- $\forall x (K(x) \to J(x))$

Kysely on luonnollisesti muotoa:

$$\exists x J(x) \land \forall x \forall y (J(x) \land J(y) \to x = y)$$

Todistus semanttisella taululla on seuraava:

1. $T(\exists x K(x) \land \forall x \forall y(K(x) \land K(y) \to x = y))$

2. $T(\forall x(J(x) \to K(x)))$

3. $T(\forall x(K(x) \to J(x)))$

4. $E(\exists x J(x) \land \forall x \forall y(J(x) \land J(y) \to x = y))$

5. $T(\exists x K(x)),\ 1.$

6. $T(\forall x \forall y(K(x) \land K(y) \to x = y))$

7. $E(\exists x J(x))$ 7. $E(\forall x \forall y(J(x) \land J(y) \to x = y))$

8. $T(K(a)),\ 5.\ x/a$ 8. $E(\forall y(J(b) \land J(y) \to b = y)),\ 7.\ x/b$

9. $E(J(a)),\ 7.\ x/a$ 9. $E(J(b) \land J(c) \to b = c),\ 8.\ y/c$

10. $T(K(a) \to J(a)), 3.$ 10. $T(J(b) \land J(c))$

11. $E(K(a))$ 11. $T(J(a))$ 11. $E(b = c)$

12. $T(J(b))$

13. $T(J(c))$

14. $T(K(b) \land K(c) \to b = c),\ 6.\ x/b, y/c$

15. $E(K(b) \land K(c))$ 15. $T(b = c)$

16. $E(K(b))$ 16. $E(K(c)$

17. $T(J(b) \to K(b)), 2.\ x/b$ 17. $T(J(c) \to K(c)), 3.\ x/c$

18. $E(J(b))$ 18. $T(K(b))$ 18. $E(J(c))$ 18. $T(K(c))$

3. Luonnolliset luvut $0, 1, 2, \ldots$ esitetään muuttujattomina termeinä 0, $s(0)$, $s(s(0)), \ldots$, jotka rakentuvat vakiosymbolista 0 ja funktiosymbolista s, joka tulkitaan funktioksi $s(x) = x + 1$ luonnollisille luvuille x.

a) Määrittele predikaattilogiikan lausein predikaatit $O(x) =$ "x on pariton", $E(x) =$ "x on parillinen" ja $G(x, y) =$ "x on suurempi kuin y" kaikille luonnollisille luvuille x ja y.

b) Osoita semanttisella taululla, että on olemassa parillinen luonnollinen luku, joka on suurempi kuin jokin pariton luonnollinen luku.

Ratk.
Kaikkien predikaattien määritelmissä otetaan ensin perustapaus ja sen jälkeen annetaan kaava, jolla muita instansseja voi päätellä. Predikaatti $E(x)$ määritellään seuraavasti:

$$E(0) \land \forall x(E(x) \to E(s^2(x)))$$

Siis nolla katsotaan parilliseksi ja jos joku luku on parillinen niin myös sen seuraajan seuraaja (luku + 2) on parillinen. Parittomuus samaan tapaan:

$$O(0) \land \forall x(O(x) \to O(s^2(x)))$$

Suurempi kuin määritellään kahden lauseen avulla:

$$\forall x G(s(x), x) \land \forall x \forall y(G(x, y) \to G(s(x), y))$$

Ensimmäisestä saadaan pääteltyä, että luvun seuraaja on sitä suurempi. Jälkimmäinen lause puolestaan mahdollista suuruuden päättelyn, kun lukujen arvojen ero on yhtä suurempi.

Tehtävässä pyydetään todistamaan, että on olemassa parillinen luku, joka on jotain paritonta lukua suurempi. Formaalisti:

$$\exists x \exists y(E(x) \land O(y) \land G(x, y)$$

Taulua rakennettaessa voi lähteä siitä tavoitteesta, että todista, että luku 2 ($s^2(0)$) on parillinen ja lukua 1 ($s(0)$, pariton) suurempi.

$$T(E(0) \wedge \forall x(E(x) \rightarrow E(s^2(x))))$$
$$T(O(s(0)) \wedge \forall x(O(x) \rightarrow O(s^2(x))))$$
$$T(\forall x G(s(x), x) \wedge \forall x \forall y(G(x, y) \rightarrow G(s(x), y)))$$
$$E(\exists x \exists y(E(x) \wedge O(y) \wedge G(x, y)))$$
$$T(E(0))$$
$$T(\forall x(E(x) \rightarrow E(s^2(x))))$$
$$T(O(s(0)))$$
$$T(\forall x(O(x) \rightarrow O(s^2(x))))$$
$$T(\forall x(G(s(x), x)))$$
$$T(\forall x \forall y(G(y, x) \rightarrow G(s(y), x)))$$
$$T(E(0) \rightarrow E(s^2(0)))$$
$$\begin{array}{cc} E(E(0)) & T(E(s^2(0))) \\ \otimes & T(G(s^2(0), s(0))) \\ & E(E(s^2(0)) \wedge O(s(0)) \wedge (G(s^2(0), s(0)))) \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} E(E(s^2(0))) & E(O(s(0))) & E(G(s^2(0), s(0))) \\ \otimes & \otimes & \otimes \end{array}$$

4. Määritä klausuulijoukkojen

a) $\{\{\neg G(x, c)\}\}$,

b) $\{\{P(f(y), y)\}\}$,

c) $\{\{P(x)\},\ \{\neg P(a),\ \neg P(b)\}\}$,

d) $\{\{\neg P(x, y),\ \neg P(y, z),\ G(x, z)\}\}$,

e) $\{\{\neg P(x, y)\},\ \{Q(a, x),\ Q(b, f(y))\}\}$ ja

f) $\{\{P(x),\ Q(f(x, y))\}\}$

Herbrand-universumit ja kannat.

Ratk.
Herbrand-universumi U muodostuu termeistä, jotka ovat konstruoitavissa klausuulijoukossa esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista. Jos klausuulijoukossa ei ole vakiosymboleita, universumiin otetaan jokin vakiosymboli, esimerkiksi a (näin tapahtuu kohdissa (b), (d) ja (f)). Herbrand-kanta B puolestaan muodostuu atomisista lauseista, jotka ovat konstruoitavissa klausuulijoukossa esiintyvistä predikaattisymboleista käyttämällä argumentteina Herbrand-universumin U termejä.

a) $U = \{c\}$, $B = \{G(c, c)\}$.

b) $U = \{a, f(a), f(f(a)), ...\}$, $B = \{P(e_1, e_2) \,|\, e_1 \in U, e_2 \in U\}$.

c) $U = \{a, b\}$, $B = \{P(a), P(b)\}$.

d) $U = \{a\}$, $B = \{P(a, a), G(a, a)\}$.

e) $U = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), ...\}$,
$B = \{P(e_1, e_2) \,|\, e_1 \in U, e_2 \in U\} \cup \{Q(e_1, e_2) \,|\, e_1 \in U, e_2 \in U\}$.

f) $U = \{a, f(a, a), f(a, f(a, a)), f(f(a, a), a), f(f(a, a), f(a, a)), ...\}$,
$B = \{P(e) \,|\, e \in U\} \cup \{Q(e) \,|\, e \in U\}$.

5. Tarkastellaan kaavajoukkoa

$$\Sigma = \{\forall x P(x, a, x),\ \neg \exists x \exists y \exists z(P(x, y, z) \wedge \neg P(x, f(y), f(z)))\}$$

a) Muunna Σ klausuulijoukoksi S.

b) Anna S:n Herbrand-universumi H sekä Herbrand-kanta B.

c) Esitetään Herbrand-struktuurit Herbrand-kannan osajoukkoina. Hae S:lle osajoukkorelaatioon, $\subseteq$, nähden minimaalinen ja maksimaalinen Herbrand-malli.

6. Muunna ongelma predikaattilogiikan lauseen

$$\exists x \exists y(P(x) \leftrightarrow \neg P(y)) \rightarrow \exists x \exists y(\neg P(x) \wedge P(y))$$

pätevyyden selvittämisestä lauselogiikan toteutuvuusongelmaksi ja ratkaise ongelma lauselogiikan menetelmin.

T-79.144 **Syksy 2002**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 11 (opetusmoniste, kappaleet 7.1 – 9.3)
27 – 30.11.2002

1. Laadi substituutioiden $\{x/y, y/b, z/f(x)\}$ ja $\{x/g(a), y/x, w/c\}$ kompositio.

Ratk.
Substituutioita kompositoitaessa on kaksi asiaa:

- Mikäli tulos olisi muotoa x/x ei korvausta tehdä.
- Jos oikea substituutti korvaa samaa muuttujaa kuin vasen, korvaus suoritetaan vasemmasta.

Näin saadaan:

$$\{y/b, z/f(g(a)), w/c\}$$

2. Mitkä ovat seuraavien literaalijoukkojen yleisimmät unifioijat?

a) $\{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
b) $\{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
c) $\{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
d) $\{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$

Ratk.
Sovelletaan unifikaatioalgoritmia vaiheittain:

a) $\sigma_0 = \epsilon$ (tyhjä substituutio)
$S_0 = \{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
$D(S_0) = \{x, f(y)\}$
$\sigma_1 = \{x/f(y)\}$
$\sigma_0\sigma_1 = \{x/f(y)\}$
$S_1 = \{P(f(y), g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
$D(S_1) = \{y, f(z)\}$
$\sigma_2 = \{y/f(z)\}$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_2 = \{x/f(f(z)), y/f(z)\}$
$S_2 = \{P(f(f(z)), g(f(z)), f(a)), P(f(f(z)), g(f(z)), z)\}$
$D(S_2) = \{f(a), z\}$
$\sigma_3 = \{z/f(a)\}$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \{x/f(f(f(a))), y/f(f(a)), z/f(a)\}$
$S_3 = \{P(f(f(f(a))), g(f(f(a))), f(a))\}$
Unifiointi onnistui, yleisin unifioija on $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

b) $\sigma_0 = \epsilon$
$S_0 = \{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
$D(S_0) = \{x, a, y\}$
$\sigma_1 = \{x/a\}$
$S_1 = \{P(a, f(a), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
$D(S_1) = \{a, y\}$
$\sigma_2 = \{y/a\}$
$S_2 = \{P(a, f(a), g(a)), P(a, f(g(a)), g(a))\}$
$D(S_2) = \{a, g(a)\}$
Termit a ja $g(a)$ eivät unifioidu; unifiointi ei siis onnistu.

c) $\sigma_0 = \epsilon$
$S_0 = \{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
$D(S_0) = \{x, y, b\}$
$\sigma_1 = \{x/b\}$
$S_1 = \{P(b, f(b, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
$D(S_1) = \{b, y\}$
$\sigma_2 = \{y/b\}$
$S_2 = \{P(b, f(b, b)), P(b, f(b, a))\}$
$D(S_2) = \{b, a\}$
Termit b ja a eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

d) $\sigma_0 = \epsilon$
$S_0 = \{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$
$D(S_0) = \{f(a), y, x\}$
$\sigma_1 = \{y/f(a)\}$
$S_1 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(x, f(a), f(z))\}$
$D(S_1) = \{f(a), x\}$
$\sigma_2 = \{x/f(a)\}$
$S_2 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(z))\}$
$D(S_2) = \{z, b, f(z)\}$ (z:aa ei voi korvata $f(z)$:lla)
$\sigma_3 = \{z/b\}$
$S_3 = \{P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(b))\}$
$D(S_3) = \{b, f(b)\}$
Termit b ja $f(b)$ eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

3. Osoita, että

a) substituutioiden kompositio ei ole kommutatiivinen, eli että on olemassa substituutiot σ ja λ s.e. $\sigma\lambda \neq \lambda\sigma$.

b) yleisimmät unifioijat eivät ole yksikäsitteiset, eli että jollekin lausejoukolle S on olemassa kaksi yleisintä unifioija, σ ja λ, s.e. $\sigma \neq \lambda$.

Ratk.

a) Olkoon $\sigma = \{x/a\}$ ja $\lambda = \{x/b\}$.

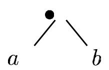
b) Lausejoukolle $S = \{P(x), P(y)\}$ saadaan yleisimmät unifioijat $\{x/y\}$ ja $\{y/x\}$.

4. Unifioi seuraava joukko.

$$\{P(x,y,z), P(f(w,w), f(x,x), f(y,y))\}$$

5. Esitetään binääripuut kaksipaikkaisen funktiosymbolin s (sisäsolmut) ja yksipaikkaisen funktiosymbolin l (lehtisolmut) avulla.

a) Tarkoittakoon predikaatti PK(x,y), että binääripuu x on binääripuun y peilikuva. Määrittele predikaatti PK predikaattilogiikan lausein siten, että pystyt päättelemään, ovatko mitkä tahansa kaksi yllä annetun esitystavan mukaista binääripuuta toistensa peilikuvia.



b) Hae resoluutiolla oheisen binääripuun peilikuva.

Ratk.
Tehtävän ratkaisussa on seuraavat vaiheet:

- Formalisoidaan tietämys predikaattilogiikan lauseiksi.
- Muunnetaan lauseet klausuulimuotoon.
- Samat askeleet halutun loogisen seuraksen negaatiolle.
- Suoritetaan resoluutio.
- Haetaan haluttu peilikuva resoluutiossa suoritettujen substituutioiden avulla.

Tehtävän PK-predikaatti esitetään luonnollisesti samaan tapaan kuin aiemmin:

$$\forall x(PK(l(x), l(x)))$$
$$\forall x\forall y\forall u\forall v(PK(x,y) \wedge PK(u,v) \ \rightarrow PK(s(x,u), s(v,y))$$

Lauseiden muunto klausuulimuotoon on melko suoraviivaista:

$$\{PK(l(x), l(x))\}$$

$$\begin{aligned} & \forall x\forall y\forall u\forall v\neg((PK(x,y) \wedge PK(u,v)) \ \vee PK(s(x,u), s(v,y)) \\ \rightsquigarrow\ & \forall x\forall y\forall y\forall v(\neg PK(x,y) \vee \neg PK(u,v) \vee PK(s(x,u), s(v,y)) \\ \rightsquigarrow\ & \{\neg PK(x,y), \neg PK(u,v), PK(s(x,u), s(v,y)\} \end{aligned}$$

Näiden lauseiden perusteella annetulle puulle pitäisi siis pystyä päättelemään peilikuva. Negaatio formalisoituna sekä muunnettuna klausuulimuotoon:

$$\begin{aligned} & \neg\exists x(PK(s(l(a), l(b)), x)) \\ \rightsquigarrow\ & \forall x\neg(PK(s(l(a), l(b)), x)) \\ \rightsquigarrow\ & \{\neg PK(s(l(a), l(b)), x)\} \end{aligned}$$

Suoritetaan näille lauseille resoluutiorefutaatio. Tässä tuli muista, että virheettömyyden takia lauseita käytettäessä tuli ottaa käyttöön uudet muuttujanimet.

1.	$\{\neg PK(x_1,y_1), \neg PK(u_1,v_1), PK(s(x_1,u_1), s(v_1,y_1))\}$	$P2$
2.	$\{\neg PK(s(l(a), l(b)), x_2)\}$	S
3.	$\{\neg PK(l(a), y_1), \neg PK(l(b), v_1)\}$ $1, 2, MGU(x_1/l(a), u_1/l(b), x_2/s(v_1, y_1))$	
4.	$\{PK(l(x_4), l(x_4))\}$	$P1$
5.	$\{\neg PK(l(b), v_1)\}$	$3, 4\ MGU(x_4/a, y_1/l(a))$
6.	$\{PK(l(x_6), l(x_6))\}$	$P1$
7.	$\Box$	$5, 6\ MGU(x_6/b, v_1/l(b))$

Puun peilikuva voidaan tästä hakea tutkimalla, rakentamalla suoritettujen substituudioiden komposition ja tarkastelemalla mitä muuttujan x_2 paikalle tulee substioiduksi. Kompositio on

$$\{x_1/l(a), y_1/l(a), u_1/l(b), v_1/l(b), x_2/s(l(b), l(a)), x_4/a, x_6/b\}$$

ja x_2 korvataan siis termillä $s(l(b), l(a))$, joka on haluttu peilikuva.

6. Todista resoluutiolla, että ei ole olemassa miesparturia, kun:

a) Jokainen parturi ajaa niiden miesten parrat, jotka eivät itse aja partaansa.

b) Kukaan parturi ei aja niiden miesten partoja, jotka ajavat itse partansa.

Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja: $P(x) =$ "x on parturi" ja $A(x, y) =$ "x ajaa y:n parran".

a) $\forall x(P(x) \to \forall y(\neg A(y,y) \to A(x,y)))$,

b) $\forall x(P(x) \to \forall y(A(y,y) \to \neg A(x,y)))$.

Muodostetaan klausuulit:

a) $\forall x(P(x) \to \forall y(\neg A(y,y) \to A(x,y)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(A(y,y) \vee A(x,y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee A(y,y) \vee A(x,y))$
$\neg P(x) \vee A(y,y) \vee A(x,y)$
$\{\neg P(x_1),\ A(y_1,y_1),\ A(x_1,y_1)\}$

b) $\forall x(P(x) \to \forall y(A(y,y) \to \neg A(x,y)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(\neg A(y,y) \vee \neg A(x,y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee \neg A(y,y) \vee \neg A(x,y))$
$\neg P(x) \vee \neg A(y,y) \vee \neg A(x,y)$
$\{\neg P(x_2),\ \neg A(y_2,y_2),\ \neg A(x_2,y_2)\}$

Halutaan todistaa $\neg\exists x P(x)$ ja siksi muodostetaan lauseen negaatio $\exists x P(x)$. Tämä lause muutetaan klausuulimuotoon $\{P(a)\}$.

Klausuuleista

$$\{\neg P(x_1),\ A(y_1,y_1),\ A(x_1,y_1)\} \qquad \text{ja} \qquad \{\neg P(x_2),\ \neg A(y_2,y_2),\ \neg A(x_2,y_2)\}$$

saadan

$$\{\neg P(x_3)\} \qquad (\text{substituutio } \{x_1/x_3, x_2/x_3, y_1/x_3, y_2/x_3\})$$

Klausuuleista $\{P(a)\}$ ja $\{\neg P(x_3)\}$ saadaan tyhjä klausuuli (substituutio $\{x_3/a\}$). Täten klausuulijoukko on toteutumaton ja $\neg\exists x P(x)$ seuraa loogisesti premisseistä.