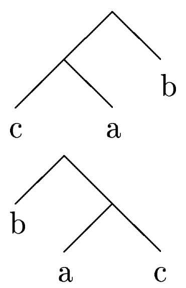
T-79.144 **Syksy 2002**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 10
(opetusmoniste, kappaleet 6.3 - 7.4)
12 - 18.11.2002

1. Esitetään binääripuut kaksipaikkaisen funktiosymbolin s (sisäsolmut) ja yksipaikkaisen funktiosymbolin l (lehtisolmut) avulla. Näin oheisen kuvan ylempi puu saa termiesityksen $s(s(l(c), l(a)), l(b))$.



a) Tarkoittakoon predikaatti $\mathrm{PK}(x, y)$, että binääripuu x on binääripuun y peilikuva. Määrittele predikaatti PK predikaattilogiikan lausein siten, että pystyt päättelemään, ovatko mitkä tahansa kaksi yllä annetun esitystavan mukaista binääripuuta toistensa peilikuvia.

b) Osoita semanttisella taululla, että ylempi binääripuu on alemman binääripuun peilikuva.

2. Kvanttorilla $\exists! x$ tarkoitetaan, että "on olemassa vain yksi x". Väittämä $\exists! x\, \phi(x)$ voidaan ilmaista predikaattilogiikan lauseella

$$(\exists x \phi(x)) \wedge (\forall x \forall y (\phi(x) \wedge \phi(y) \rightarrow x = y)).$$

Formalisoi seuraavat lauseet predikaattilogiikalla:

1.	On vain yksi kuuraparta.
2.	Kaikki joulupukit ovat kuurapartoja.
3.	Kaikki kuuraparrat ovat joulupukkeja.
4.	On vain yksi joulupukki.

Osoita semanttisella taululla, että lause 4 on lauseiden 1-3 looginen seuraus.

3. Luonnolliset luvut $0, 1, 2, \ldots$ esitetään muuttujattomina termeinä 0, $s(0)$, $s(s(0))$,..., jotka rakentuvat vakiosymbolista 0 ja funktiosymbolista s, joka tulkitaan funktioksi $s(x) = x + 1$ luonnollisille luvuille x.

a) Määrittele predikaattilogiikan lausein predikaatit $O(x)$ = “x on pariton”, $E(x)$ = “x on parillinen” ja $G(x, y)$ = “x on suurempi kuin y” kaikille luonnollisille luvuille x ja y.

b) Osoita semanttisella taululla, että on olemassa parillinen luonnollinen luku, joka on suurempi kuin jokin pariton luonnollinen luku.

4. Määritä klausuulijoukkojen

a) $\{\{\neg G(x, c)\}\}$,

b) $\{\{P(f(y), y)\}\}$,

c) $\{\{P(x)\}, \{\neg P(a), \neg P(b)\}\}$,

d) $\{\{\neg P(x, y), \neg P(y, z), G(x, z)\}\}$,

e) $\{\{\neg P(x, y)\}, \{Q(a, x), Q(b, f(y))\}\}$ ja

f) $\{\{P(x), Q(f(x, y))\}\}$

Herbrand-universumit ja kannat.

5. Tarkastellaan kaavajoukkoa

$$\Sigma = \{\forall x P(x, a, x), \neg\exists x \exists y \exists z (P(x, y, z) \land \neg P(x, f(y), f(z)))\}$$

a) Muunna Σ klausuulijoukoksi S.

b) Anna S:n Herbrand-universumi H sekä Herbrand-kanta B.

c) Esitetään Herbrand-struktuurit Herbrand-kannan osajoukkoina. Hae S:lle osajoukkorelaatioon, $\subseteq$, nähden minimaalinen ja maksimaalinen Herbrand-malli.

6. Muunna ongelma predikaattilogiikan lauseen

$$\exists x \exists y (P(x) \leftrightarrow \neg P(y)) \to \exists x \exists y (\neg P(x) \land P(y))$$

pätevyyden selvittämisestä lauselogiikan toteutuvuusongelmaksi ja ratkaise ongelma lauselogiikan menetelmin.