Paketti III: SOVELLUKSIA

1. Teoreemantodistin OTTER
2. Logiikkaohjelmointi
3. Ohjelmien oikeellisuustarkastelut

1 Teoreemantodistin OTTER

- Syötetiedoston sisältö
- Käyttöohjeita
- Tulosteiden tulkitseminen
- Kotitehtävän palautus
- Saavutuksia matematiikassa

1.1 Syötetiedoston sisältö

- OTTER noudattaa lauseiden osalta seuraavaa syntaksia:

$(\forall x(\forall y(\forall z\varphi)))$	$\rightsquigarrow$	(all x y z φ)
$(\exists x(\exists y(\exists z\varphi)))$	$\rightsquigarrow$	(exists x y z φ)
$(\varphi \land \psi)$	$\rightsquigarrow$	(φ & ψ)
$(\varphi \lor \psi)$	$\rightsquigarrow$	(φ | ψ)
$(\varphi \rightarrow \psi)$	$\rightsquigarrow$	(φ -> ψ)
$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	$\rightsquigarrow$	(φ <-> ψ)
$(t_1 = t_2)$	$\rightsquigarrow$	(t_1 = t_2)
$(\neg\varphi)$	$\rightsquigarrow$	(-φ)

Esimerkki.

$\forall x \forall y \exists z P(x,y,z)$ $\rightsquigarrow$ `all x y (exists z P(x,y,z)).`

$\forall x(P(x) \land (Q(x) \lor R(x)))$ $\rightsquigarrow$ `all x (P(x) & (Q(x) | R(x))).`

- Eri symbolit erotetaan toisistaan sijainnin perusteella. OTTER sallii samannimiset vakio-, muuttuja-, funktio- ja predikaattisymbolit!
- OTTER erottelee muuttujat vakioista kvanttorien perusteella (näin mahdolliset "vapaat" muuttujaesiintymät tulkitaan vakioiksi).
- OTTER muuntaa lauseet automaattisesti klausuuleiksi, joita voi käyttää myös tiettyjen syntaksivirheiden tunnistamiseen.

Esimerkki. Lausekkeessa `(all x y(P(x,y)))` esiintyvä `y` on sekä predikaatti- että vakiosymboli ja `P` funktiosymboli, mutta `y` tulkitaan muuttujaksi ja `P` predikaatiksi lausekkeessa `(all x y (P(x,y)))`.

OTTERille laadittava syötetiedosto

- Yksinkertainen esimerkki syötetiedosta on annettu alla.
- `set(auto)`-asetuksella OTTER valitsee itse käytettävät päättelysäännöt (mm. resoluutiosääntö muunnelmineen).

```
set(auto).
formula_list(usable).

% tähän tulee sitten tarvittava lausejoukko

% ja kyselyn negaatio (vain yksi kysely kerrallaan)

end_of_list.
```


Esimerkki. Palautetaan mieliin aikaisempi tartuntavaaraesimerkki.

```
set(auto).
formula_list(usable).
% Section A: database
tapaa(a,b). tapaa(a,c). sairastaa(c).

% Section B: definitions
all x y (tapaa(x,y) -> tapaa(y,x)).
all x y (tapaa(x,y) & sairastaa(y) -> tartuntavaarassa(x)).
all x y (tapaa(x,y) & tartuntavaarassa(y) -> tartuntavaarassa(x)).

% Section C: negation of the query
-(tartuntavaarassa(a) & tartuntavaarassa(b)).

end_of_list.
```

- OTTER pystyy osoittamaan lausejoukon helposti ristiriitaiseksi.

1.2 Käyttöohjeita

- OTTER otettaan käyttöön Atk-keskuksen unix-koneissa komennolla

  `use otter`

- Manuaaliin löytyy linkki kotitehtäväpalvelimesta sivulta

  `http://logic.tcs.hut.fi/~ltp/`

- OTTERin voi käynnistää esim. seuraavilla tavoilla:

```
otter < file.in
otter < file.in > file.out
otter < file.in | less
```

- Hakemistosta `/p/edu/tik-79.144` löytyy myös dokumentaatiota ja esimerkkejä (pääasiassa matematiikasta).

1.3 Tulosteiden tulkitseminen

OTTERin tulostiedostosta löytyvät mm.

- Lauseille automaattisesti haetut klausuulimuodot.
- Klausuulien luokittelu (tukijoukon identifiointi).
- Annetuista klausuuleista johdetut uudet klausuulit, kun OTTER yritää johtaa tyhjän klausuulin.
- Mahdollisesti löydetty todistus, johon eristetään tyhjän klausuulin johtamisessa tarvittavat klausuulit.

Esimerkki. Tutustutaan tarkemmin OTTERin tulosteisiin tartuntavaaraesimerkissä.

1. Klausuulimuodosta tulee seuraava:

```
list(usable).
0 [] tapaa(a,b).
0 [] tapaa(a,c).
0 [] sairastaa(c).
0 [] -tapaa(x,y)|tapaa(y,x).
0 [] -tapaa(x,y)| -sairastaa(y)|tartuntavaarassa(x).
0 [] -tapaa(x,y)| -tartuntavaarassa(y)|tartuntavaarassa(x).
0 [] -tartuntavaarassa(a)| -tartuntavaarassa(b).
end_of_list.
```


2. set(auto)-asetuksen myötä OTTER päättää itse tukijoukkoon (engl. set of support) tulevat klausuulit:

```
------------> process usable:
** KEPT (pick-wt=6): 1 [] -tapaa(x,y)|tapaa(y,x).
** KEPT (pick-wt=7): 2 [] -tapaa(x,y)| -sairastaa(y)|
                          tartuntavaarassa(x).
** KEPT (pick-wt=7): 3 [] -tapaa(x,y)| -tartuntavaarassa(y)|
                          tartuntavaarassa(x).
** KEPT (pick-wt=4): 4 [] -tartuntavaarassa(a)|
                          -tartuntavaarassa(b).
------------> process sos:
** KEPT (pick-wt=3): 5 [] tapaa(a,b).
** KEPT (pick-wt=3): 6 [] tapaa(a,c).
** KEPT (pick-wt=2): 7 [] sairastaa(c).
```


3. Tämän jälkeen yritetään johtaa tyhjä klausuuli, mikä onnistuukin:

```
=========== start of search ===========

given clause #1: (wt=3) 5 [] tapaa(a,b).
given clause #2: (wt=2) 7 [] sairastaa(c).
given clause #3: (wt=3) 6 [] tapaa(a,c).
given clause #4: (wt=2) 9 [hyper,6,2,7] tartuntavaarassa(a).
given clause #5: (wt=3) 8 [hyper,5,1] tapaa(b,a).
given clause #6: (wt=3) 10 [hyper,6,1] tapaa(c,a).
given clause #7: (wt=2) 11 [hyper,8,3,9] tartuntavaarassa(b).

-----> EMPTY CLAUSE at   0.00 sec ----> 13 [hyper,11,4,9] $F.
```


4. Tämän jälkeen OTTER eristää johdon tyhjälle klausuulille:

```
Length of proof is 3.  Level of proof is 2.
---------------- PROOF ----------------
1 [] -tapaa(x,y)|tapaa(y,x).
2 [] -tapaa(x,y)| -sairastaa(y)|tartuntavaarassa(x).
3 [] -tapaa(x,y)| -tartuntavaarassa(y)|tartuntavaarassa(x).
4 [] -tartuntavaarassa(a)| -tartuntavaarassa(b).
5 [] tapaa(a,b).
6 [] tapaa(a,c).
7 [] sairastaa(c).
8 [hyper,5,1] tapaa(b,a).
9 [hyper,6,2,7] tartuntavaarassa(a).
11 [hyper,8,3,9] tartuntavaarassa(b).
13 [hyper,11,4,9] $F.
------------ end of proof -------------
```

Huomioita.

- Mikäli OTTER ei löydä todistusta, OTTER voi pysähtyä ilmoittaen "Search stopped because sos empty." tai jäädä ikuiseen silmukkaan.
- Muuttujasidontojen eristämistä varten OTTERissa voi määritellä `$ans`-alkuisia predikatteja, joiden argumenteiksi kirjataan mielenkiinnon kohteena olevat muuttujat.

Esimerkki. Haetaan jokin tartuntavaarassa oleva henkilö kyselyllä `(exists x (tartuntavaarassa(x) & $ans(x)))`:

```
2 [] -tapaa(x,y)| -sairastaa(y)|tartuntavaarassa(x).
4 [] -tartuntavaarassa(x)| -$ans(x).
6 [] tapaa(a,c).
7 [] sairastaa(c).
9 [hyper,6,2,7] tartuntavaarassa(a).
10 [binary,9.1,4.1] -$ans(a).
```


1.4 Kotitehtävän palautus

- Ratkaisuiksi laaditaan 3 syötetiedostoa OTTERille.
- Kohtaan 3a palautetaan syötetiedosto, joka sisältää pelkät predikaattien määritelmät (ei tietokantaa eikä kyselyä).
- Kohtiin 3b ja 3c palautetaan syötetiedosto, joka sisältää em. määritelmien lisäksi myös tietokannan ja tähän liittyvän kyselyn.
- Kohdan 3a ratkaisuksi palautettua syötetiedostoa käytetään
  1. kohdassa 3a määritelmien konsistenssin tarkastamiseen,
  2. kohdassa 3d vertailuun mallimääritelmien kanssa ja
  3. kohdassa 3e testikyselyn evaluointiin jonkin tietokannan suhteen.

1.5 Saavutuksia matematiikassa

- OTTERia on käytetty mm. matematiikkaan liittyvien avointen ongelmien ratkomiseen.
- Ensimmäisenä merkittävänä ongelmana pystyttiin osoittamaan kahden Boolen algebroille esitetyn aksiomatisoinnin ekvivalenssi (Huntingtonin ja Robbinsin määritelmät).
- Tuloksen yksityiskohtia on selvitetty tarkemmin sivulla

  `http://www-unix.mcs.anl.gov/~mccune/papers/robbins/`
- Muita OTTERilla (ja OTTERiin liittyvillä ohjelmilla) osoitettuja tuloksia on raportoitu sivulla

  `http://www-unix.mcs.anl.gov/AR/new_results/`

2 Logiikkaohjelmointi

- Logiikkaohjelmien syntaksi
- Herbrand-malleihin perustuva semantiikka
- Resoluutio logiikkaohjelmien tapauksessa
- PROLOGin hakumekanismi

2.1 Logiikkaohjelmien syntaksi

Logiikkaohjelmointi (esim. PROLOG) perustuu klausuulien aliluokkaan.

Määritelmä. Mahdollisesti muuttujia sisältävää klausuulia $C = \{A_1(\vec{t_1}), \ldots, A_n(\vec{t_n}), \neg B_1(\vec{u_1}), \ldots, \neg B_m(\vec{u_m})\}$ kutsutaan

1. *Horn-klausuuliksi*, jos $n \leq 1$,
2. *ohjelmaklausuuliksi*, jos $n = 1$, ja
3. *maaliklausuuliksi*, jos $n = 0$.

Esimerkki. Klausuulit $\{N(0)\}$ ja $\{N(s(x)), \neg N(x)\}$ ovat ohjelmaklausuuleja, kun taas $\{\neg N(s(0)), \neg N(s(s(x)))\}$ on maaliklausuuli. Näistä jokainen on Horn-klausuuli.

Määritelmä. Logiikkaohjelma P on joukko ohjelmaklausuuleja.

Logiikkaohjelmien suhde predikaattilogiikkaan

Klausuulimuotojen ja normaalimuotojen välisten yhteyksien perusteella:

1. Ohjelmaklausuuli $C = \{A(\vec{t}), \neg B_1(\vec{u_1}), \ldots, \neg B_m(\vec{u_m})\}$ vastaa universaalisti kvantifioitua lausetta

   $$\forall x_1 \ldots \forall x_n (B_1(\vec{u_1}) \wedge \cdots \wedge B_m(\vec{u_m}) \rightarrow A(\vec{t}))$$

   missä $x_1, \ldots, x_n$ ovat termijonoissa $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_m}$ ja $\vec{t}$ mahdollisesti esiintyvät muuttujat.

2. Maaliklausuuli $G = \{\neg B_1(\vec{u_1}), \ldots, \neg B_m(\vec{u_m})\}$ vastaa eksistentiaalisesti kvantifioidun lauseen

   $$\phi_G = \exists x_1 \ldots \exists x_n (B_1(\vec{u_1}) \wedge \cdots \wedge B_m(\vec{u_m}))$$

   negaatiota $\neg \phi_G$, missä $x_1, \ldots, x_n$ ovat termijonoissa $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_m}$ mahdollisesti esiintyvät muuttujat.

$\Longrightarrow$ Ohjelmaklausuulien muuttujat ovat universaalisti kvantifioidut ja maaliklausuulin muuttujat ovat eksistentiaalisesti kvantifioidut.

Esimerkki. Tarkastellaan logiikkaohjelmaa

$$P = \{\{N(0)\},\ \{N(s(x)), \neg N(x)\}\}$$

ja maaliklausuulia (kyselyn negaatio) $G = \{\neg N(s(0)), \neg S(s(s(x)))\}$.

- Ohjelma P vastaa lausejoukkoa $\Sigma = \{N(0), \forall x(N(x) \rightarrow N(s(x)))\}$.
- Maaliklausuuli G vastaa kyselyn $\phi_G = \exists x(N(s(0)) \wedge N(s(s(x))))$. negaatiota $\neg \phi_G$.
- Ajatuksena on, että $P \cup \{G\}$ on toteutumaton klausuulijoukko $\iff \Sigma \models \phi_G$.

PROLOGin notaatio

- Tyypillisessä PROLOG-toteutuksessa muuttujasymbolit erotetaan vakiosymboleista ison alkukirjamen perusteella.
- Literaalijoukkojen sijaan ohjelma- ja maaliklausuulit kirjoitetaan järjestetyiksi *säännöiksi* seuraavaan tapaan:

$$\begin{array}{rcl} \{N(0)\} & \rightsquigarrow & \texttt{N(0).} \\ \{N(s(x)), \neg N(x)\} & \rightsquigarrow & \texttt{N(s(X)) :- N(X).} \\ \{\neg N(s(0)), \neg S(s(s(x)))\} & \rightsquigarrow & \texttt{:- N(s(0)), N(s(s(X))).} \end{array}$$

- Lisäksi PROLOGissa on käytössä erityinen listanotaatio:
  - `[]` on tyhjä lista,
  - `[X|Y]` on lista, joka alkaa alkiolla `X` ja jatkuu listana `Y`, ja
  - `[X,Y,Z]` on lista, jossa on alkiot `X`, `Y` ja `Z`.

2.2 Herbrand-malleihin perustuva semantiikka

Tarkastellaan logiikkaohjelmaa (eli ohjelmaklausuulien joukkoa) P:

- Ohjelman P Herbrand-universumi H ja Herbrand-kanta B määräytyvät siinä esiintyvien symbolien perusteella.
- Olkoon ohjelma P' ohjelman P Herbrand-instanssi.
- Herbrand-struktuuri $\mathcal{H}$ (käytännössä B:n osajoukko) on ohjelman P Herbrand-malli $\iff$ $\mathcal{H}$ on P':n Herbrand-malli.

Esimerkki. Logiikkaohjelman $P = \{\{N(0)\},\ \{N(s(x)), \neg N(x)\}\}$, Hebrand-universumi $U = \{0, s(0), s(s(0)), \ldots\}$, Herbrand-kanta $B = \{N(0), N(s(0)), N(s(s(0))), \ldots\}$ ja Herbrand-instanssi $P' = \{\{N(0)\},\ \{N(s(0)), \neg N(0)\},\ \{N(s(s(0))), \neg N(s(0))\}, \ldots\}$.

Väite. Olkoon P logiikkaohjelma ja B vastaava Herbrand-kanta. Tällöin

1. ohjelmalla P on ns. *pienin Herbrand-malli* $\mathcal{H}_P \subseteq B$ siten, että $\mathcal{H}_P \subseteq \mathcal{H}'$ kaikille ohjelman P Herbrand-malleille $\mathcal{H}'$, ja
2. $\mathcal{H}_P$ on ohjelman P kaikkien Herbrand-mallien leikkaus.

Esimerkki. Logiikkaohjelman $P = \{\{N(0)\},\ \{N(s(x)), \neg N(x)\}\}$ pienin Herbrand-malli $\mathcal{H}_P = \{N(0), N(s(0)), N(s(s(0))), \ldots\}$.

Väite. Olkoon P logiikkaohjelma ja $G\theta$ ohjelman P symboleihin perustuvan maaliklausuulin $G = \{\neg B_1(\vec{u_1}), \ldots, \neg B_m(\vec{u_m})\}$ muuttujaton instanssi, missä θ on ns. *vastaussubstituutio*.

$$\begin{aligned} \text{Nyt}\quad & P \models (B_1(\vec{u_1}) \land \cdots \land B_m(\vec{u_m}))\theta \\ \iff\ & \mathcal{H}_P \models B_1(\vec{u_1})\theta \land \cdots \land B_m(\vec{u_m})\theta \\ \iff\ & B_1(\vec{u_1})\theta \in \mathcal{H}_P, \ldots, B_m(\vec{u_m})\theta \in \mathcal{H}_P. \end{aligned}$$

2.3 Resoluutio logiikkaohjelmien tapauksessa

Jatkossa rajoitetaan resoluutiotodistuksia tehokkuussyistä seuraavasti:

1. Muodostetaan ainoastaan *lineaarisia resoluutiotodistuksia* (eli klausuulien sekvessejä puumaisten todistusten asemesta).
2. Resoluutiotodistukset aloitetaan kyselyn ϕ_G negaatiota $\neg\phi_G$ vastaavasta maaliklausuulista G (tavoitehakuisuus).
3. Yksittäisiä klausuuleja käsitellään järjestettyinä literaalien listoina ennemmin kuin literaalien joukkoina.
4. Käytetään valintafunktiota R, joka valitsee ei-tyhjästä järjestetystä maaliklausuulista G negatiivisen literaalin $L = R(G)$.

Seuraavaksi tarkastellaan näillä rajoituksilla saatavaa todistusmenettelyä (ns. *SLD-resoluutiota*) yksityiskohtaisemmin.

Resoluutiosääntö järjestetyille klausuuleille

Määritelmä. Olkoon $G = \{\neg B_1(\vec{u_1}), \ldots, \neg B_m(\vec{u_m})\}$ järjestetty maaliklausuuli ja $C = \{A(\vec{t}), \neg A_1(\vec{t_1}), \ldots, \neg A_n(\vec{t_n})\}$ järjestetty ohjelmaklausuuli siten, että

1. klausuuleilla G ja C ei ole yhteisiä muuttujia ja
2. atomilla $A(\vec{t})$ ja valintafunktion määräämässä literaalissa $R(G) = \neg B_i(\vec{u_i})$ esiintyvällä atomilla $B_i(\vec{u_i})$ on yleisin unifioija θ.

Klausuulien G ja C yhdistelmäksi saadaan järjestetty maaliklausuuli

$$\begin{aligned} G' = \{\ & \neg B_1(\vec{u_1}), \ldots, \neg B_{i-1}(\vec{u_{i-1}}), \\ & \neg A_1(\vec{t_1}), \ldots, \neg A_n(\vec{t_n}), \\ & \neg B_{i+1}(\vec{u_{i+1}}), \ldots, \neg B_m(\vec{u_m})\ \}\theta. \end{aligned}$$

Määritelmä. Olkoon P joukko järjestettyjä ohjelmaklausuuleita ja G järjestetty maaliklausuuli. Joukon $P \cup \{G\}$ hylkäys SLD-resoluutiolla on järjestettyjen maaliklausuulien sekvenssi $G_1, \ldots, G_n$, missä

1. $G_1 = G$,
2. jokainen järjestetty maaliklausuuli G_i $(i > 0)$ on saatu resoluutiolla edellisestä järjestetystä maaliklausuulista G_{i-1} ja jostain P:n järjestetystä ohjelmaklausuulista C (muuttujat uudelleennimetty) ja
3. $G_n = \square$.

Väite. (SLD-resoluution virheettömyys ja täydellisyys)

Klausuulijoukolla $P \cup \{G\}$ on hylkäys SLD-resoluutiolla $\iff$ $P \cup \{G\}$ on toteutumaton.

2.4 PROLOGin hakumekanismi

- PROLOGin perustana on SLD-resoluutio.
- Valintasääntö R antaa aina järjestetyn maaliklausuulin $G = \{\neg B_1(\vec{u_1}), \ldots, \neg B_m(\vec{u_m})\}$ ensimmäisen literaalin: $R(G) = \neg B_1(\vec{u_1})$.
- Tyypillisesti PROLOG-tulkki suorittaa palautuvaa syvyyshakua SLD-hylkäyksen $G_1, \ldots, G_n$ löytämiseksi annetusta maaliklausuulista $G_1 = G$ lähtien.
- Logiikkaohjelman P klausuuleja käsitellään syötetiedoston määräämässä järjestyksessä $C_1, \ldots, C_n$.

- Hakuavaruuden pisteet määräytyvät järjestettyjen maaliklausuulien sekvenssien $G_1, \ldots, G_i$ perusteella.
- Toimenpiteet syvyydellä i olevassa hakuavaruuden pisteessä:
  1. Jos $G_i = \square$, haku voidaan todeta onnistuneeksi ja lopettaa.
  2. Jos $G_i \neq \square$, tarkastetaan mahdollisuudet tehdä resoluutioaskel maaliklausuulin G_i ja ohjelmaklausuulien $C_1, \ldots, C_n$ kesken. (Voidaan rajoittua ohjelmaklausuuleihin C_j, joissa on literaalia $R(G_i) = \neg B(\vec{t})$ vastaava positiivinen literaali $B(\vec{t'})$).
  3. Rekursio: mikäli resoluutioaskel on mahdollinen useamman ohjelmaklausuulin $C'_1, \ldots, C'_m$ suhteen, valitaan näistä yksi klausuuli C'_j kerrallaan, johdetaan resoluutiolla uusi maaliklausuuli G_{i+1} ja jatketaan hakua syvyydellä $i + 1$.

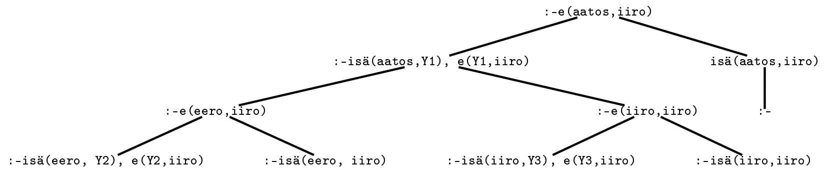
- Koska kysymyksessä on *palautuva* syvyyshaku, hakuavaruuden pisteessä $G_1, \ldots, G_i$ menetellään lisäksi seuraavasti:
  1. Haku voidaan todeta epäonnistuneeksi ko. pisteessä, mikäli
     - $G_i \neq \square$ ja
     - $G_k \neq \square$ kaikille maaliklausuuleille G_k hakuavaruuden pisteissä $G_1, \ldots, G_i, \ldots, G_k$ (missä $k > i$).
  2. Tällöin palataan valintoihin pisteessä $G_1, \ldots, G_{i-1}$ $(i > 1)$ **tai** todetaan haku kokonaisuudessaan epäonnistuneeksi $(i = 1)$.
- Vastaussubstituutio θ saadaan yleisimpien unifioijien kompositiona ja voidaan rajata maaliklausuulissa G_1 esiintyviin muuttujiin.

Esimerkki. Tarkastellaan seuraavaa logiikkaohjelmaa:

```
isä(aatos,eero). isä(aatos,iiro). isä(oiva,aatos).

e(X,Z) :- isä(X,Y), e(Y,Z). % esi-isäpredikaatti e
e(X,Y) :- isä(X,Y).
```

Maaliklausuuli `:- e(aatos, iiro)` johtaa seuraavaan hakuun:

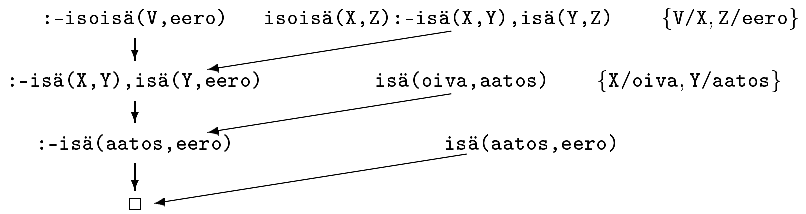


$\Longrightarrow$ PROLOG-tulkki vastaa kyselyyn myöntävästi.

Esimerkki. Tarkastellaan edellisen logiikkaohjelman muunnelmaa:

```
isä(aatos,eero). isä(aatos,iiro). isä(oiva,aatos).
isoisä(X,Z) :- isä(X,Y), isä(Y,Z).
```

Maaliklausuulilla `:-isoisä(V,eero)` löydetään seuraava SLD-hylkäys.



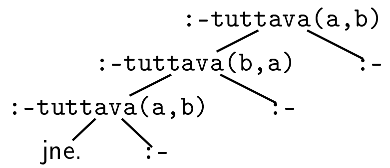
$\Longrightarrow$ Muuttujan V arvo selviää yleisimpien unifioijien kompositiosta: {V/oiva, X/oiva, Z/eero, Y/aatos}.

- SLD-resoluution täydellisyys menetetään, Koska PROLOGissa käytetään syvyyshakua (tehokkuussyistä).

Esimerkki. Tarkastellaan seuraavia ohjelmaklausuuleja:

```
tuttava(X,Y) :- tuttava(Y,X).
tuttava(a,b).
```

Maaliklausuulista `:-tuttava(a,b)` aloitettu syvyyshaku ei pääty:



Ongelma vältetään, jos ohjelmaklausuulien järjestys vaihdetaan!

3 Ohjelmien oikeellisuustarkastelut

- Ehtolausekkeiden ekvivalenssi
- Toistolausekkeiden invariantit
- Rakenteinen induktio ja rekursiiviset tietotyypit

3.1 Ehtolausekkeiden ekvivalenssi

- Ohjelmointikielissä käytetään paljon ehtolausekkeita kontrolloimaan, millä ehdoilla ja mitä toimintoja suoritetaan.
- Jos ehtolausekkeita muutetaan esim. optimointitarkoituksessa, halutaan varmistua että toiminnot suoritetaan samoilla ehdoilla.
- Ehtolausekkeiden ekvivalenssin osoittamiseen voidaan käyttää sekä lauselogiikkaa tai predikaattilogiikkaa.
- Jos ehtolausekkeilla on *sivuvaikutuksia*, pelkkä loogisen ekvivalenssin tarkastaminen ei välttämättä riitä.

Esimerkki. Tarkastellaan johdantoluennon esimerkkiä:

```
P1: if(myptr != NULL && myptr[0] == ’/’) doit(myptr);
    if(!(myptr == NULL || myptr[0] == ’.’)) dothat(myptr);

P2: if(myptr != NULL) {
      if(myptr[0] == ’/’) doit(myptr);
      if(myptr[0] != ’.’) dothat(myptr);
    }
```

- Valitaan seuraavat atomiset lauseet: $A =$"`myptr == NULL`", $B =$"`myptr[0] == ’/’`" ja $C =$"`myptr[0] == ’.’`".
- Nyt esim. proseduuria `dothat(myptr)` kutsutaan ehdoilla $\neg(A \vee C)$ (P1) ja $\neg A \wedge \neg C$ (P2), jotka ovat ekvivalentit lauselogiikan nojalla.

3.2 Toistolausekkeiden invariantit

- Ohjelmointikielten keskeisiä primitiivejä ovat erilaiset toistolausekkeet, joiden avulla jotain toimintoa (proseduuria) voidaan toistaa haluttu määrä:

  ```
  for(i=0; i<n; i++) printf("%i ", i);
  while(i<n) if((k=a[i++])>m) m=k;
  ```
- Ongelma: kuinka voitaisiin osoittaa toistorakenteita sisältävien algoritmien toimivuus kaikissa tilanteissa?
- Toistorakenteelle halutaan tyypillisesti osoittaa *invariantti* ϕ eli ominaisuus, joka säilyy voimassa toistorakenteen suorituksen ajan.
- Tällöin on luontevaa käyttää induktiota toistorakenteen suorituskertojen lukumäärän suhteen.

Esimerkki. Tarkastellaan seuraavaa C-kielistä funktiota ja siinä esiintyvää while-silmukkaa.

```
int sum(int a[], int n)    /* taulukko ja taulukon koko */
{
  int s=0;                 /* taulukon lukujen summa */
  int i=0;                 /* indeksi */
  while(i<n) {
    s = s+a[i]; i = i+1;   /* summaus */
  }
  return s;
}
```

Jatkossa osoitetaan, että funktio palauttaa mielivaltaisen kokonaislukutaulukon alkioiden summan.

- Todistetaan induktiolla silmukan suorituskertojen (k) suhteen, että:

  $$s_k = \sum_{j=0}^{j<i_k} a[j] \text{ ja } i_k \leq n,$$

  missä s_k ja i_k ovat muuttujien `s` ja `i` arvot, kun funktion `sum` while-silmukkaa on suoritettu k kertaa.

- *Perustapaus*: ($k = 0$ eli silmukkaa ei ole suoritettu kertaakaan):

  $$s_0 = 0 = \sum_{j=0}^{j<i_0} a[j] = \sum_{j=0}^{j<0} a[j] \text{ ja } i_0 = 0 \leq n.$$

- *Induktiohypoteesi* (tilanne k:n suorituskerran jälkeen):

  $$s_k = \sum_{j=0}^{j<i_k} a[j] \text{ ja } i_k \leq n.$$

- *Induktioaskel* (huomaa, että $i_k < n$ silmukan ehdon perusteella):

  $$s_{k+1} = s_k + a[i_k] = \sum_{j=0}^{j<i_k} a[j] + a[i_k] = \sum_{j=0}^{j<i_{k+1}} a[j] \text{ ja}$$
  $$i_{k+1} = i_k + 1 \leq n.$$

- Tyypillisesti pelkkä invariantti ei riitä takaamaan, että toistorakenteen suorittaminen johtaisi lopulta haluttuun tulokseen.
- Toistorakenteen lopetusehdosta saadaan usein kriittistä lisäinformaatiota.

Esimerkki. Jatketaan edellisen esimerkin `sum`-funktion analysointia.

1. Silmukan suoritus päättyy, kun $i_k < n$ tulee epätodeksi.
2. Koska tällöin $i_k \leq n$ on edelleen tosi, tiedämme, että $i_k = n$.
3. Tällöin muuttujan `s` arvona on

   $$s_k = \sum_{j=0}^{j<n} a[j],$$

   mikä onkin taulukon `a` lukujen summa.

3.3 Rakenteinen induktio ja rekursiiviset tietotyyppit

- Tietojenkäsittelyssä käytetään paljon rekursiivisesti määriteltyjä tietorakenteita: listat, pinot, puut, jne.
- Induktiota voidaan käyttää myös tällaisia tietorakenteita käsittelevien ohjelmien oikeellisuustarkasteluissa.
- Tietyissä tapauksissa induktio voidaan kytkeä suoraan tietorakenteen induktiiviseen määritelmään: esim. puiden lehti- ja sisäsolmujen käsittely (*rakenteinen induktio*).
- Induktio voidaan suorittaa myös jonkin monotonisesti kasvavan *mitan* (esim. listan pituus tai puun korkeus) suhteen.

Esimerkki. Tarkastellaan PROLOG-proseduuria `reverse`, joka järjestää listan käänteiseen järjestykseen (listasta `[1,2,3]` saadaan `[3,2,1]`):

```
reverse([],[]).
reverse([X|Y],Z) :- reverse(Y,V), append(V,X,Z).

append([],X,[X]).
append([X|Y],Z,[X|V]) :- append(Y,Z,V).
```

Huomioita.

- Toteutuksessa on käytetty apuproseduuria/apupredikaattia `append` (jonka oikeellisuuden joudumme osoittamaan samalla).
- Oikeellisuustarkastelussa osoitetaan induktiolla, että `reverse` käsittelee pituudeltaan n olevat listat oikein.

- PROLOG-tulkki vastaa myönteisesti ja palauttaa vastaussubstituution θ, mikäli tulkki onnistuu johtamaan vastaavasta maaliklausuulista tyhjän klausuulin $\Box$ (θ on yleisimpien unifioijien kompositio).

Todistettavat ominaisuudet:

1. PROLOG-tulkki antaa kyselyyn `:-reverse(L,M)` vastaussubstituution θ
   $\iff$ lista $\mathtt{M}\theta$ on lista `L` käännettynä.
2. PROLOG-tulkki antaa kyselyyn `:-append(L,A,M)` vastaussubstituution θ
   $\iff$ listassa $\mathtt{M}\theta$ esiintyvät ensin listan `L` alkiot ja sitten alkio `A`.

Yllä `L` ja $\mathtt{M}\theta$ sekä alkio `A` ovat muuttujattomia ja listan `L` pituus on n.

- Osoitetaan induktiolla, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n on em. ominaisuus (joten PROLOG-proseduurit `reverse` ja `append` käsittelevät oikein mielivaltaisen pitkiä listoja `L`).
- *Perustapaus* ($n = 0$):
  Koska $n = 0$, listan `L` täytyy olla tyhjä lista `[]`.
  Tällöin kysely `:-reverse([],M)` palauttaa vastauksen θ
  $\iff$ $\mathtt{M}\theta$=`[]` (θ on termien `M` ja `[]` MGU)
  $\iff$ lista $\mathtt{M}\theta$ on lista `[]` käännettynä.
  Vastaavasti kysely `:-append([],A,M)` palauttaa vastauksen θ
  $\iff$ $\mathtt{M}\theta$=`[A]` (θ on termien `M` ja `[A]` MGU)
  $\iff$ listassa $\mathtt{M}\theta$ esiintyy ensin listan `[]` alkiot ja sitten alkio `A`.
- *Induktiohypoteesi*:
  todistettava ominaisuus on voimassa, kun listan `L` pituus on n.

Induktioaskel: Olkoon listan `L` pituus $n + 1$.

Kysely `:-reverse(L,M)` palauttaa vastauksen $\theta = \theta_1\theta_2\theta_3$

$\iff$ θ_1 on atomien `reverse(L,M)` ja `reverse([X|Y],Z)` MGU,
`L`=`[X|Y]`θ_1=`[X`θ_1`|Y`θ_1`]` ja $\mathtt{M}\theta_1$=$\mathtt{Z}\theta_1$,
kysely `:-reverse(Y`θ_1`,V)` palauttaa vastauksen θ_2 ja
kysely `:-append(V`θ_2`,X`θ_1`,Z`θ_1`)` palauttaa vastauksen θ_3

$\iff$ θ_1 on atomien `reverse(L,M)` ja `reverse([X|Y],Z)` MGU,
`L`=`[X|Y]`θ_1=`[X`θ_1`|Y`θ_1`]` ja $\mathtt{M}\theta_1$=$\mathtt{Z}\theta_1$,
lista $\mathtt{V}\theta_2$ on lista $\mathtt{Y}\theta_1$ käännettynä ja listassa
$\mathtt{Z}\theta_1\theta_3$ esiintyy ensin listan $\mathtt{V}\theta_2$ alkiot ja sitten alkio $\mathtt{X}\theta_1$

$\iff$ lista $\mathtt{M}\theta$= $\mathtt{M}\theta_1\theta_3$=$\mathtt{Z}\theta_1\theta_3$ on lista `L`=`[X`θ_1`|Y`θ_1`]` käännettynä.

Huomio. Yllä `L`, $\mathtt{X}\theta_1$, $\mathtt{Y}\theta_1$, $\mathtt{V}\theta_2$ ja $\mathtt{Z}\theta_1\theta_3$ ovat muuttujattomia.

Kysely `:-append(L,A,M)` palauttaa vastauksen $\theta = \theta_1\theta_2$

$\iff$ θ_1 on atomien `append(L,A,M)`
ja `append([X|Y],Z,[X|V])` MGU,
`L`=`[X|Y]`θ_1=`[X`θ_1`|Y`θ_1`]`, `A`=$\mathtt{Z}\theta_1$ ja $\mathtt{M}\theta_1$=`[X|V]`θ_1= `[X`θ_1`|V`θ_1`]`
ja kysely `:-append(Y`θ_1`,Z`θ_1`,V`θ_1`)` palauttaa vastauksen θ_2

$\iff$ θ_1 on atomien `append(L,A,M)`
ja `append([X|Y],Z,[X|V])` MGU,
`L`=`[X|Y]`θ_1=`[X`θ_1`|Y`θ_1`]`, `A`=$\mathtt{Z}\theta_1$ ja $\mathtt{M}\theta_1$=`[X|V]`θ_1= `[X`θ_1`|V`θ_1`]`
listassa $\mathtt{V}\theta_1\theta_2$ esiintyy listan $\mathtt{Y}\theta_1$ alkioiden jälkeen alkio $\mathtt{Z}\theta_1$.

$\iff$ listassa $\mathtt{M}\theta$= $\mathtt{M}\theta_1\theta_2$= `[X`$\theta_1$`|V`$\theta_1\theta_2$`]` esiintyy ensin listan
`L`=`[X`θ_1`|Y`θ_1`]` alkiot ja sitten alkio $\mathtt{Z}\theta_1$=`A`.

Huomio. Yllä `L`, `A`, $\mathtt{X}\theta_1$, $\mathtt{Y}\theta_1$, $\mathtt{Z}\theta_1$, $\mathtt{V}\theta_1\theta_2$ ovat muuttujattomia.

Haluatko tietää logiikasta lisää ???

Muita laboratoriomme järjestämiä logiikkaan liittyviä kursseja:

- Tik-79.146 Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä I (kl)
- Tik-79.154 Logiikka tietotekniikassa: erityiskysymyksiä II (sl)
- Tik-79.240 Laskennallisen vaativuuden erikoiskurssi (sl)

Näillä opintojaksoilla käsitellään lisää logiikkaan liittyviä aiheita.