T-79.144 **Syksy 2001**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 1 (kurssin esitiedot)
18 – 21.9.2001

1. Osoita induktiolla, että n-alkioisella joukolla on 2^n osajoukkoa ?

Ratk.
Perustapaus: 0-alkioisella joukolla (olettaen $0 \in \mathbb{N}$) eli tyhjällä joukolla on yksi osajoukko, se itse. Lisäksi $2^0 = 1$.

Induktio-oletus: Pätekööön periaate n-alkioisille joukoille.

Induktioaskel: Tarkastellaan joukkoa, jossa on $n + 1$ alkiota. Valitaan joukosta mielivaltainen alkio a. Tarkasteltavan joukon osajoukot jakautuvat osajoukkojen, joissa a on mukana, joukkoon A ja osajoukkojen, joissa sitä ei ole mukana, joukkoon B. Joukkoa B voidaan tarkastella n-alkioisen joukon osajoukkojen joukkona. Näitä on induktio-oletuksen perusteella 2^n. Toisaalta, jokainen A alkio voidaan bijektiivisesti kuvata tietyksi B:n alkioksi (poistamalla a) ja näin siis $|A| = |B|$. Joukkoja on siis yhteensä $2 * 2^n = 2^{n+1}$.

2. Osoita induktioperiaatteen ja täydellisen induktion ekvivalenssi ?

Ratk.
Kysymyksessä pitää siis osoittaa, että jos jotain voi todistaa tavallisen induktion avulla niin saman asian voi todistaa täydellisellä induktiolla ja päinvastoin.

($\Rightarrow$) Jos ominaisuuden P voi todistaa tavallisella induktiolla, riittää $P(n + 1)$:n todistamiseksi se, että $P(n)$ pätee. Täydellisen induktion vahvempi induktio-oletus pitää sisällään myös tapauksen n.

($\Leftarrow$) Jos ominaisuus P on todistettu vahvalle induktiolla, sen voi todistaa tavallisella induktiolla siten, että ominaisuus muuttuu muotoon $Q(n) = \forall m \leq n : P(m)$. Tällöin pitää siis todistaa $Q(n + 1)$ ja todeta, että siitä seuraa $P(n + 1)$. Perustapaus redusoituu kuitenkin samaksi, $P(0) \Leftrightarrow Q(0)$.

3. Todista seuraavat lauseet:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) $E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B)$.

Ratk.
Todistus tapahtuu nk. Vennin digrammeilla. Tässä tapauksessa tulee piirtää kolme lomittain menevää vapaamuotoista suljettua kuviota ja merkitä niihin A, B ja C. Todistus etenee värjäämällä kuvioita lauseiden perusteella sisimmistä operaatioista alkaen. Mikäli operaatio on unioni $\cup$, värjätään alue, jossa riittää, että jompikumpi operandeista on edustettuna. Leikkauksessa $\cap$ tulee luonnollisesti olla molemmat. Komplementti $-$ sisältää universumin kaikki muut alkiot.

4. Olkoon R refleksiivinen relaatio. Osoita, että $R \subseteq A \times A$ on ekvivalenssirelaatio jos ja vain jos kaikilla $a \in A, b \in A, c \in A$,
$\langle a, b\rangle \in R$ ja $\langle b, c\rangle \in R \Rightarrow \langle c, a\rangle \in R$?

Ratk.
($\Rightarrow$, vain jos) Ekvivalenssirelaatio edellytti symmetrisyyttä, refleksivisyyttä ja transitiivisuutta. Transitiivisuus ilmaistaan kaavalla muodossa: kaikilla $a \in A, b \in A, c \in A$ $\langle a, b\rangle \in R$ ja $\langle b, c\rangle \in R \Rightarrow \langle a, c\rangle \in R$. Symmetrisyys taas : kaikilla $a \in A, b \in A, \langle a, b\rangle \in R \Rightarrow \langle b, a\rangle \in R$. Näistä kahdesta seuraa tehtävän ominaisuus. Lisäksi R todettiin tehtävänannossa refleksiiviseksi.

($\Leftarrow$, jos). Pitää osoittaa, että jos tehtävän ominaisuus pätee, syntynyt relaatio on refleksiivinen, transitiivinen ja symmetrinen. Refleksiivisyys todetaan tehtävänannossa. Symmetrisyys voidaan todistaa refleksiivisyyden ja annetun ominaisuuden avulla seuraavasti: kaikille $a \in A, b \in A, \langle a, a\rangle \in R, \langle a, b\rangle \in R \Rightarrow \langle b, a\rangle \in R$. Toisaalta symmetrisyydestä ja annetusta ominaisuudesta seuraa transitiivisuus ja ekvivalenssirelaation ehdot on täytetty.

5. Anna esimerkkejä *relaatioista* ihmisten joukossa, jotka ovat:

a) refleksiivisiä.
Ratk. olla yhtä vanha.

b) irrefleksiivisiä.
Ratk. vanhempi-relaatio $\langle a, b\rangle$: a on b:n isä.

c) symmetrisiä.
Ratk. ystävä, yhtä-vanha.

d) transitiivisia.
Ratk. pidempi kuin, vanhempi kuin.

6. Anna esimerkkejä *funktioista* ihmisten joukosta mahdollisesti joihinkin muihin joukkoihin, jotka ovat:

a) injektiivisiä.
Ratk.
$f : I \rightarrow S$, kuvaus henkilöltä hänen sosiaaliturvatunnukselleen. Jokaisella on niitä vain yksi eikä kahdella henkilöllä ole samaa. Kuvaus ei kuitenkaan ole surjektio koska, esim. huomenna syntyville on jo tunnukset varattu.

b) surjektiivisia.
Ratk.
$f : I \rightarrow N$, kuvaus ihmisiltä esim. kalenterin nimistöön, joka toimitetaan ottamalla henkilön etunimi. Näitä on jokaisella vain yksi ja nimistön kaikilla nimillä on joukko sen nimisiä ihmisvastineita. Jos henkilön etunimi ei ole nimistössä voidaan kuvaksi sopia miehen tapauksessa "Matti" ja naisen "Marja", jotka siellä lienevät.

c) bijektioita.
Ratk.
Patologinen esimerkki on minä-funktio, joka kuvaa henkilön itselleen. Toinen voisi olla esim. oikea peukaloni, kullakin niitä on vain yksi ja jokainen oikea peukalo on jonkun.

T-79.144 **Syksy 2001**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 2 (opetusmoniste, kappaleet 1.1 - 1.5)
25 – 28.9.2001

1. Ilmaise seuraavat väittämät lauselogiikalla:

a) En saa työtä valmiiksi, ellet sinä auta.

b) Ei tippa tapa eikä ämpäriin huku.

c) Kuljen työmatkat jalan, pyörällä tai joskus autolla.

d) Merja ja Arto tulevat meille kylään.

e) Koska olet ollut ilkeä, et saa jälkiruokaa.

f) Vaikka manuaali olikin pitkä, se tuntui loppuvan kesken.

g) Jos minulta kysytään — tai vaikkei kysyttäisikään — niin hänen ei kannata ostaa autoa, tai sitten hänen on asuttava kaukana työpaikastaan ja bensiinin on tultava halvemmaksi.

Ratk:

a) $\neg A \to \neg B$, kun
$A =$ "Sinä autat"
$B =$ "Saan työn valmiiksi"

b) $\neg A \wedge \neg B$, kun
$A =$ "Tippa tappaa"
$B =$ "Ämpäriin hukkuu"

c) $A \vee B \vee C$, kun
$A =$ "Kuljen työmatkat jalan"
$B =$ "Kuljen työmatkat pyörällä"
$C =$ "Kuljen työmatkat joskus autolla"

d) Joko: A, kun
$A =$ "Merja ja Arto tulevat meille kylään"
tai: $A \wedge B$, kun
$A =$ "Merja tulee meille kylään"
$B =$ "Arto tulee meille kylään"

e) Esim. $A \to \neg B$ tai $A \wedge \neg B$, kun
$A =$ "Olet ollut ilkeä"
$B =$ "Saat jälkiruokaa"

f) Esim. $A \wedge B$, kun
$A =$ "Manuaali oli pitkä"
$B =$ "Manuaali tuntui loppuvan kesken"

g) $A \vee \neg A \to \neg B \vee (C \wedge D)$, kun
$A =$ "Minulta kysytään"
$B =$ "Hänen kannattaa ostaa auto"
$C =$ "Hänen on asuttava kaukana työpaikastaan"
$D =$ "Bensiinin on tultava halvemmaksi"

2. Olkoon atomisten lauseiden joukko $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$. Mitkä seuraavista ovat lauselogiikan lauseita. Perustele.

a) A
Ratk. Kyllä, atominen lause.

b) $\neg(A \wedge B))$
Ratk. Ei, ei voida johtaa lauseenmuodostussäännöillä. Myös, ei ole parillista määrää sulkuja.

c) $(A \wedge (B \to (A \wedge C)))$
Ratk. Kyllä, vastauksesi voinee antaa jäsennyspuun, josta muodostussääntöjen soveltaminen käy ilmi.

d) Tänään sataa.
Ratk. Ei, luonnollista kieltä.

3. Todista että sulkujen määrä jokaisessa lauselogiikan lauseessa on parillinen.

Ratk. Todistetaan väite induktiolla lauseen sisältämien konnektiivien määrän suhteen.

Perustapaus: Lause, jossa ei ole yhtään konnektiivia on atomilause, ja se sisältää 0 sulkua (0 on parillinen luku).

Induktio-oletus: Lause, jossa on korkeintaan n konnektiivia, sisältää parillisen määrän sulkeita.

Induktio-askel: Tarkastellaan lausetta f, jossa on $n+1$ konnektiivia. Lauseen muoto on tällöin yksi seuraavista: $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ tai $(\alpha \leftrightarrow \beta)$. Nyt α ja β ovat lauseita, joissa on korkeintaan n konnektiivia. Induktio-oletuksen mukaan α ja β sisältävät parillisen määrän sulkeita. Näin ollen lause f sisältää myös parillisen määrän sulkeita.

4. Poista tarpeettomat sulut ilman, että lauseen merkitys muuttuu.

a) $(A \rightarrow ((B \wedge C) \vee D))$
b) $(((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
c) $((A \wedge (B \vee C)) \vee (A \wedge (C \vee D)))$
d) $((\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((B \rightarrow C) \wedge A))$
e) $(((\neg A) \wedge (\neg B)) \rightarrow \neg(A \vee B))$

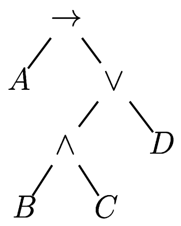
Ratk. Sovelletaan sopimuksia konnektiivien vahvuusjärjestyksestä:

a) $A \rightarrow (B \wedge C) \vee D$
b) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
c) $(A \wedge (B \vee C)) \vee (A \wedge (C \vee D))$
d) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (B \rightarrow C) \wedge A$
e) $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$

5. Mitä muotoa edellisen tehtävän lauseet ovat. Anna niille jäsennyspuut.

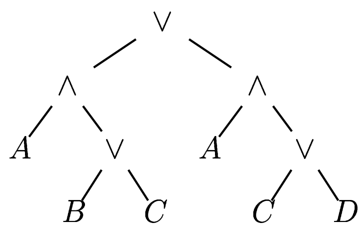
Ratk. Muoto määraytyy uloimmasta konnektiivista:

a) Implikaatio.



b) Implikaatio.

c) Disjunktio.



d) Ekvivalenssi.

e) Implikaatio.

◊ **6.** Olkoon lauselogiikan lauseille annettu leksikografinen järjestys, jossa on aluksi atomiset lauseet, tämän jälkeen niiden negaatiot, joita seuraavat binäärikonnektiivit jossain järjestyksessä. Esim. atomilauseiden joukolla $\{A\}$ järjestys voisi olla $A, \neg A, (A \lor A), (A \land A), (A \to A), (A \leftrightarrow A), (A \lor \neg A), \ldots$ Osoita, että mitkä tahansa kaksi eri lauselogiikan lausetta voidaan järjestelmällä aidosti järjestää.

7. Toteuta lauselogiikan lauseille jäsennin (engl. parser).

a) Olettaen, että sulkuja ei jätetä pois.

b) Kaikkia sulkusääntöjä sovelletaan.

T-79.144 **Syksy 2001**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 3 (opetusmoniste, kappaleet 2.1 - 2.4)
2 – 5.10.2001

1. Anna allaolevan lauseen alilauseet ja laadi sille totuustaulukko.

$$(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$$

Ratk. Leveysuuntaisella haulla saadaan: $\neg A \to (\neg B \to C)$, $\neg(\neg A \to B) \to C$, $\neg A$, $\neg B \to C$, $\neg(\neg A \to B)$, C, A, $\neg B$, $\neg A \to B$, B. Lisäksi tietysti lause itse. Totuustaulukon laatiminen on ilmeistä (2^3 riviä ja alilauseiden osoittama määrä sarakkeita).

2. Määrittele lauselogiikan konnektiivit

a) aina epätoden lauseen ($\bot$) ja implikaation ($\to$) avulla.
Ratk.
$\neg A \equiv A \to \bot$
$A \vee B = \neg A \to B \equiv (A \to \bot) \to B$
$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B) = \neg(A \to \neg B) = \neg(A \to (B \to \bot)) \equiv$
$(A \to (B \to \bot)) \to \bot$
$A \leftrightarrow B = A \to B \wedge B \to A \equiv$
$((A \to B) \to ((B \to A) \to \bot)) \to \bot$

b) Shefferin viivan (opetusmoniste kappale 2.2) avulla. **Ratk.**
$\neg A \equiv (A \mid A)$
$A \wedge B = \neg(A \mid B) \equiv (A \mid B) \mid (A \mid B)$
$A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B) = (\neg A \mid \neg B) \equiv (A \mid A) \mid (B \mid B)$
$A \to B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B) = (A \mid \neg B) \equiv (A \mid (B \mid B))$
$A \leftrightarrow B = A \to B \wedge B \to A = (A \mid (B \mid B)) \wedge (B \mid (A \mid A)) \equiv$
$((A \mid (B \mid B)) \mid (B \mid (A \mid A))) \mid ((A \mid (B \mid B)) \mid (B \mid (A \mid A)))$

3. Olkoon $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{P}$ ja $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{P}$ kaksi totuusjakelua ja $\phi \in \mathcal{L}$ lause. Osoita, että jos $\mathcal{A}_1 \cap At(\phi) = \mathcal{A}_2 \cap At(\phi)$, niin $\mathcal{A}_1 \models \phi \iff \mathcal{A}_2 \models \phi$.

Ratk.
Todistus rakenteellisella induktiolla:
Perustapaus: Olkoon ϕ atominen lause. Tällöin joukko-opillisen leikkauksen määritelmän perusteella joko $\phi \in \mathcal{A}_1$ ja $\phi \in \mathcal{A}_2$ jolloin $\mathcal{A}_1 \models \phi$ ja $\mathcal{A}_2 \models \phi$. Toinen vaihtoehto on, että $\phi \notin \mathcal{A}_1$ ja $\phi \notin \mathcal{A}_2$ jolloin $\mathcal{A}_1 \not\models \phi$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \phi$. Näin ollen ekvivalenssi pätee.

Induktio-oletus: Päteköön väittämä rakenteen kompleksisuuteen n asti. (n voi olla esim. konnektiivien lkm.).

Induktioaskel: Tapausanalyysi eri konnektiivien suhteen.

1. Olkoon lause muotoa $\neg\alpha$. Induktio-oletuksen perusteella väittämä pätee lauseelle α. Nyt jos $\mathcal{A}_1 \models \alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \models \alpha$ niin $\mathcal{A}_1 \not\models \neg\alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \neg\alpha$. Edelleen, jos $\mathcal{A}_1 \not\models \alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \alpha$ niin $\mathcal{A}_1 \models \neg\alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \models \neg\alpha$. Näin alkup. väittämän ekvivalenssi pysyy voimassa.

2. Olkoon lause muotoa $\alpha \wedge \beta$. Väittämä pätee oletuksen mukaan jälleen sekä α:lle että β:lle. Eri vaihtoehtoja tulee nyt 4. Oletetaan, että molemmat alilauseet ovat tosia molemmissa totuusjakeluissa. Tällöin myös alilauseiden konjunktio on tosi molemmissa ja ekvivalenssi säilyy. Muut tapaukset samaan tapaan (konjunktio epätosi molemmissa).

3. Muut konnektiivit niiden määritelmien mukaan.

4. Olkoon $\mathcal{A} = \emptyset$ totuusjakelu. Laske totuusmääritelmän nojalla allaolevan lauseen totuusarvo.

$$(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$$

Ratk. Lause (merkitään sitä ϕ:llä) on muodoltaan implikaatio. Sovelletaan totuusmääritelmää:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \phi \quad &\iff \quad \mathcal{A} \not\models (\neg B \to \neg A) \text{ tai } \mathcal{A} \models ((\neg B \to A) \to B) \\
\mathcal{A} \not\models \neg B \to \neg A \quad &\iff \quad \mathcal{A} \models \neg B \text{ ja } \mathcal{A} \not\models \neg A. \\
\mathcal{A} \models \neg B \quad &\iff \quad \mathcal{A} \not\models B \\
\mathcal{A} \not\models \neg A \quad &\iff \quad \mathcal{A} \models A
\end{aligned}$$

Nyt siis annetun totuusjakelun perusteella tiedetään, että $\mathcal{A} \not\models A$ ja $\mathcal{A} \not\models B$. Näinollen viimeinen rivi ei toteudu, toisen rivin "ja" ei toteudu ja 1. rivin "tai":n 1. argumentti on epätosi eli $\mathcal{A} \models (\neg B \to \neg A)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models ((\neg B \to A) \to B) \quad &\iff \quad \mathcal{A} \not\models (\neg B \to A) \text{ tai } \mathcal{A} \models B \\
\mathcal{A} \not\models (\neg B \to A) \quad &\iff \quad \mathcal{A} \models \neg B \text{ ja } \mathcal{A} \not\models A \\
\mathcal{A} \models \neg B \quad &\iff \quad \mathcal{A} \not\models B
\end{aligned}$$

Tästä nähdään, että viimeinen rivi toteutuu, samoin toisen rivin "ja"-ehto, jolloin myös ensimmäisen rivin vasen sarake pitää paikkansa, eli $\mathcal{A} \models ((\neg B \to A) \to B)$. Seurauksena ensimmäisen taulukon ensimmäisen rivin oikean sarakkeen "tai"-ehdon jälkimmäinen argumentti pätee, ja siis myös vasen sarake, eli $\mathcal{A} \models \phi$.

Tämä esitystapa oli nk. top-down, monimutkaisemmasta yksinkertaiseen. Toinen vaihtoehto on bottom-up eli lähteä liikkeelle atomilauseista ja edetä monimutkaisempia rakenteita kohti.

5. Laadi ohjelma, joka generoi syötteenä annetulle lauseelle totuustaulukon.

T-79.144 **Syksy 2001**

Logiikka tietotekniikassa: perusteet

Laskuharjoitus 4 (opetusmoniste, kappaleet 3.1 - 4.5)

9 – 12.10.2001

1. Insinööri Sörsselssön laati seuraavat vaatimukset liikennevaloille kahden yksisuuntaisen kadun risteykseen:

(i) Kummassakin liikennevalossa on vihreä, keltainen ja punainen lamppu, joista täsmälleen yksi palaa kerrallaan.

(ii) Liikennevalojen vihreät lamput eivät pala yhtäaikaisesti.

(iii) Jos toisessa liikennevalossa palaa punainen lamppu, niin toisessa palaa joko keltainen tai vihreä lamppu.

a) Esitä annetut vaatimukset lauselogiikan lauseina.

b) Laadi syntyneelle lausejoukolle totuustaulukko.

c) Hae taulukon avulla lausejoukolle malli / totuusjakelu, jossa se ei toteudu.

d) Mieti parannusehdotuksia annetuille vaatimuksille (ajatellen todellisia liikennevaloja). Mitä liikennevalojen ominaisuuksia et pysty kuvaamaan lauselogiikan avulla?

Ratk.

a) Käytetään atomisia lauseita $P1$, $K1$ ja $V1$, jotka tarkoittavat että liikennevalon 1 punainen, keltainen ja vihreä lamppu palaa (tässä järjestyksessä). Olkoot $P2$, $K2$ ja $V2$ vastaavat atomiset lauseet liikennevalolle 2. Käydään annetut vaatimukset lävitse:

(i) Liikennevalolle 1 saadaan lause $P1 \vee K1 \vee V1$ (ainakin yksi lampuista palaa) ja lauseet $P1 \rightarrow \neg K1 \wedge \neg V1$, $K1 \rightarrow \neg P1 \wedge \neg V1$, $V1 \rightarrow \neg P1 \wedge \neg K1$ (korkeintaan yksi lampuista palaa). Lisäksi tarvitaan vastaavat lauseet liikennevalolle 2.

(ii) Saadaan lause $\neg(V1 \wedge V2)$.

(iii) Saadaan lauseet $P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$ ja $P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$.

b) Laaditaan totuustaulu edellisen tehtävän lausejoukolle. Merkitään taulun tiivistämiseksi α_i:llä lausetta $(Pi \vee Ki \vee Vi) \wedge (Pi \rightarrow \neg Ki \wedge \neg Vi) \wedge (Ki \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Vi) \wedge (Vi \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Ki)$ (joka siis merkitsee, että liikennevalossa i palaa täsmälleen yksi lamppu). Tähdellä merkityt rivit vastaavat lausejoukon malleja.

P1 K1 V1 P2 K2 V2	α_1	α_2	$\neg(V1 \wedge V2)$	$P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$	$P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$	
E E E E E E	E	E	T	T	T	
E E E E E T	E	T	T	T	T	
E E E E T E	E	T	T	T	T	
E E E E T T	E	E	T	T	T	
E E E T E E	E	T	T	T	E	
E E E T E T	E	E	T	T	E	
E E E T T E	E	E	T	T	E	
E E E T T T	E	E	T	T	E	
E E T E E E	T	E	T	T	T	
E E T E E T	T	T	E	T	T	
E E T E T E	T	T	T	T	T	*
E E T E T T	T	E	E	T	T	
E E T T E E	T	T	T	T	T	*
E E T T E T	T	E	E	T	T	
E E T T T E	T	E	T	T	T	
E E T T T T	T	E	E	T	T	
E T E E E E	T	E	T	T	T	
E T E E E T	T	T	T	T	T	*
E T E E T E	T	T	T	T	T	*
E T E E T T	T	E	T	T	T	
E T E T E E	T	T	T	T	T	*
E T E T E T	T	E	T	T	T	
E T E T T E	T	E	T	T	T	
E T E T T T	T	E	T	T	T	

P1 K1 V1 P2 K2 V2	α_1	α_2	$\neg(V1 \wedge V2)$	$P1 \to (K2 \vee V2)$	$P2 \to (K1 \vee V1)$	
E T T E E E	E	E	T	T	T	
E T T E E T	E	T	E	T	T	
E T T E T E	E	T	T	T	T	
E T T E T T	E	E	E	T	T	
E T T T E E	E	T	T	T	T	
E T T T E T	E	E	E	T	T	
E T T T T E	E	E	T	T	T	
E T T T T T	E	E	E	T	T	
T E E E E E	T	E	T	E	T	
T E E E E T	T	T	T	T	T	*
T E E E T E	T	T	T	T	T	*
T E E E T T	T	E	T	T	T	
T E E T E E	T	T	T	E	E	
T E E T E T	T	E	T	T	E	
T E E T T E	T	E	T	T	E	
T E E T T T	T	E	T	T	E	
T E T E E E	E	E	T	E	T	
T E T E E T	E	T	E	T	T	
T E T E T E	E	T	T	T	T	
T E T E T T	E	E	E	T	T	
T E T T E E	E	T	T	E	T	
T E T T E T	E	E	E	T	T	
T E T T T E	E	E	T	T	T	
T E T T T T	E	E	E	T	T	
T T E E E E	E	E	T	E	T	
T T E E E T	E	T	T	T	T	
T T E E T E	E	T	T	T	T	
T T E E T T	E	E	T	T	T	
T T E T E E	E	T	T	E	T	
T T E T E T	E	E	T	T	T	
T T E T T E	E	E	T	T	T	
T T E T T T	E	E	T	T	T	
T T T E E E	E	E	T	E	T	
T T T E E T	E	T	E	T	T	
T T T E T E	E	T	T	T	T	
T T T E T T	E	E	E	T	T	
T T T T E E	E	T	T	E	T	
T T T T E T	E	E	E	T	T	
T T T T T E	E	E	T	T	T	
T T T T T T	E	E	E	T	T	

Malleja on siis 7 kappaletta ($2^6 = 64$ mahdollisuutta). Tutkimalla malleja voit huomata, että insinööri Sörsselssönin vaatimukset täyttyvät niiden määräämissä tilanteissa. Väittämä ”liikennevalojen punaiset lamput eivät pala yhtäaikaisesti” voidaan esittää lauseena $\neg(P1 \wedge P2)$. Tämä lause on tosi kaikissa edellisen tehtävän lausejoukon malleissa (tarkista), joten $\neg(P1 \wedge P2)$ on kyseisen lausejoukon looginen seuraus.

c) Väittämästä ”molemmissa liikennevaloissa palaa keltainen lamppu” saadaan lause $K1 \wedge K2$. Olkoon $\mathcal{A}$ totuusjakelu, joka kuvaa atomiset lauseet $K1$ ja $K2$ todeksi (T) ja muut atomiset lauseet epätodeksi (E). Nyt $\mathcal{A}_1 \models (K1 \wedge K2)$, koska $\mathcal{A}_1 \models K1$ ja $\mathcal{A}_2 \models K2$). Lisäksi kaikille (a)-kohdan lauseille α pätee $\mathcal{A} \models \alpha$ (tarkista). Siis $\mathcal{A}_1$ on malli annetuille vaatimuksille, jossa $K1 \wedge K2$ on tosi. (Mallin haussa voidaan käyttää esimerkiksi semanttista taulua). Olkoon $\mathcal{A}_2$ valuaatio, joka kuvaa atomiset lauseet $V1$ ja $V2$ todeksi ja muut atomiset lauseet epätodeksi. Nyt $\mathcal{A}_2 \not\models \neg(V1 \wedge V2)$, joten lausejoukko ei toteudu.

d) Yksi mahdollisuus on väljentää ensimmäistä vaatimusta, koska liikkeellelähdettäessä punainen ja keltainen lamppu palavat monissa liikennevaloissa yhtäaikaisesti (mieti, kuinka lauseita tulee muuttaa). Lauselogiikan avulla ei voi helposti esittää liikennevalojen toiminnan eri vaiheita (esim. vihreän jälkeen syttyy keltainen lamppu).

2. Tutki totuustaulukoilla, pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa.

a) Lause $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ on pätevä.

b) Lause $\neg((A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B))$ on toteutumaton.

c) Lauseet $A \leftrightarrow B$ ja $\neg(A \leftrightarrow \neg B)$ ovat loogisesti ekvivalentteja.

d) $\{(A \wedge B) \vee (C \wedge A), (A \wedge B) \vee \neg B\} \models A \vee (C \wedge \neg B)$.

Ratk.

a) Lauseen alilauseet ovat $A, B, C, A \to B, A \to C, B \to C$, $(B \to C) \to (A \to C)$ sekä lause itse (merkitään sitä ϕ:llä). Lause on pätevä, joss ϕ saa taulukossa kaikilla totuusjakeluilla arvon tosi.

A	B	C	$A \to B$	$A \to C$	$B \to C$	$(B \to C) \to (A \to C)$	ϕ
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	E	T	E	E	T	T
T	E	T	E	T	T	T	T
T	E	E	E	E	T	E	T
E	T	T	T	T	T	T	T
E	T	E	T	T	E	T	T
E	E	T	T	T	T	T	T
E	E	E	T	T	T	T	T

Viimeinen sarake sisältää pelkästään arvoa T, joten lause on pätevä.

c)

A	B	$A \leftrightarrow B$	$\neg A \leftrightarrow \neg B$
T	T	T	T
T	E	E	E
E	T	E	E
E	E	T	T

Taulukosta nähdään, että lauseiden $A \leftrightarrow B$ ja $\neg A \leftrightarrow \neg B$ sarakkeet ovat identtiset, joten ne ovat loogisesti ekvivalentit.

3. Osoita seuraavat loogisen seuraavuuden ominaisuudet.

a) $\Sigma \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma)$.

b) Monotonisuus: $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \Rightarrow \mathrm{Cn}(\Sigma_1) \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma_2)$.

Ratk.

a) Merkintä $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ tarkoitti lausejoukon Σ loogisten seurauksien joukkoa. Joukko muodostuu lauseista, jotka ovat tosia kaikilla niillä totuusjakeluilla, joilla kaikki Σ:n lauseet ovat tosia. Jos siis olisi $\Sigma \not\subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma)$, niin joukossa Σ olisi lause α ja lisäksi totuusjakelu, jolla kaikki Σ:n lauseet, siis myös α, olisivat tosia, ja α epätosi. Ilmeinen ristiriita.

b) Tarkastellaan mieliv. lausetta $\alpha \in \mathrm{Cn}(\Sigma_1)$. Tällöin α on tosi kaikilla niillä totuusjakeluilla, joilla Σ_1 lauseet ovat. Koska $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, niin myös Σ_2 mallit edellyttävät kaikkien Σ_1:n lauseiden toteutumista. Tällöin kaikilla Σ_2:n malleilla α on tosi ja $\alpha \in \mathrm{Cn}(\Sigma_2)$. Kiteyttäen voidaan todeta, että enemmän lauseita $\Rightarrow$ vähemmän malleja $\Rightarrow$ enemmän loogisia seurauksia.

$\diamondsuit$ **4.** Todista seuraavat väittämät:

a) $\Sigma \models \phi \Rightarrow \mathrm{Cn}(\Sigma) = \mathrm{Cn}(\Sigma \cup \{\phi\})$.

b) $\mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(\Sigma)) = \mathrm{Cn}(\Sigma)$.

5. Todista semanttisella taululla

a) $A \to (B \to B)$,

b) $(A \to B) \land (B \to C) \to (A \to C)$,

c) $(A \to B) \land (A \to C) \to (A \to B \land C)$ ja

d) $(A \to C) \land (B \to C) \land (A \lor B) \to C$.

Todistettavien kaavojen negaatioille konstruoidaan semanttiset taulut. Taulun kaikkien haarojen tulee sulkeutua, jotta taulun juuressa $F(\phi)$ oleva lause ϕ on pätevä. Jos taulun haara sulkeutuu ennen koko puun valmistumista, kyseistä haaraa ei enää laajenneta sääntöjä sovellettaessa.

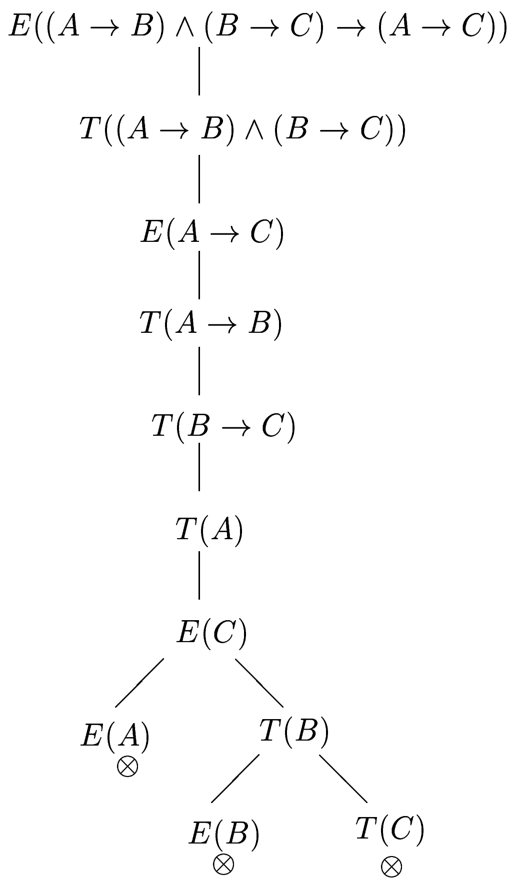
Huomaa, että semanttista taulua käytetään itse asiassa lauseen $\neg\phi$ mallien selvittämiseen. Jos taulun kaikki haarat menevät ristiriitaisikei lauseella $\neg\phi$ ei ole mallia (eli $\neg\phi$ on toteutumaton), joten lause ϕ pätevä.

Ratk.

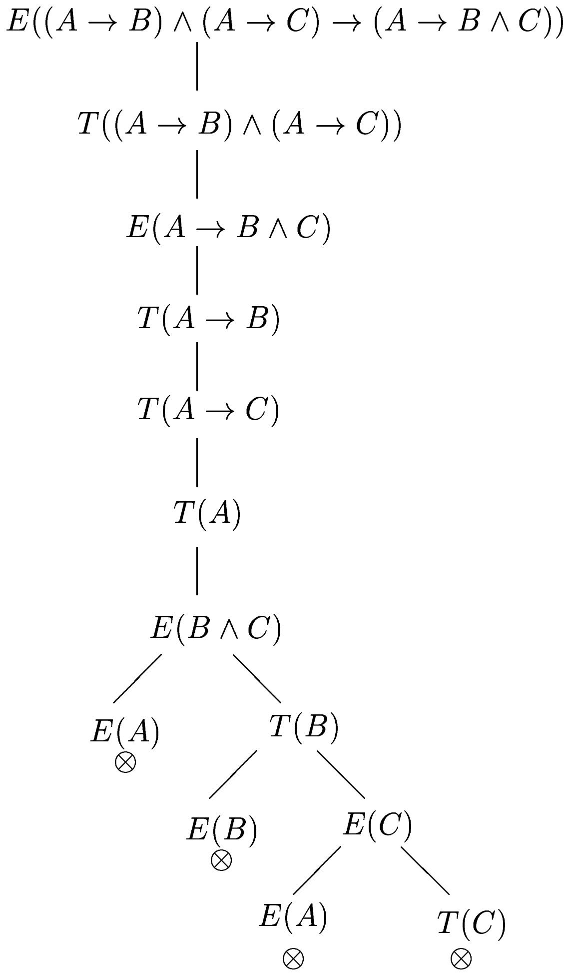
a) $A \to (B \to B)$:

$$
\begin{array}{c}
E(A \to (B \to B)) \\
| \\
T(A) \\
| \\
E(B \to B) \\
| \\
T(B) \\
| \\
E(B) \\
\otimes
\end{array}
$$

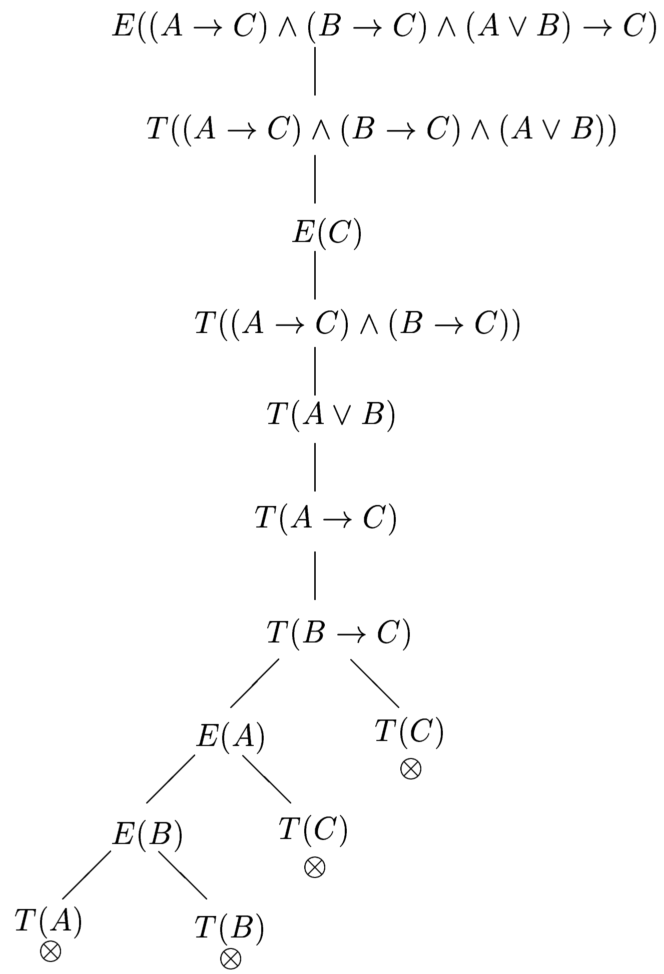
b) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$:



c) $(A \to B) \land (A \to C) \to (A \to B \land C)$:



d) $(A \to C) \wedge (B \to C) \wedge (A \vee B) \to C$:



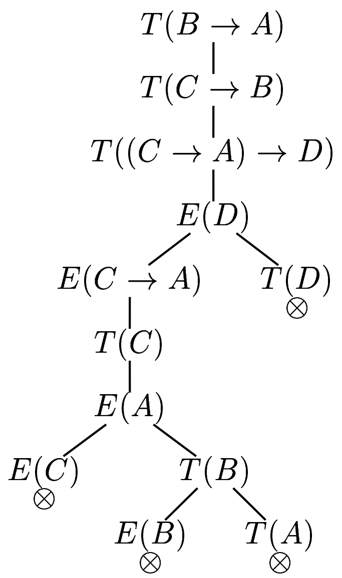
6. Tutki semanttisella taululla, pitääkö annettu väittämä paikkansa. Jos ei, anna perusteluksi totuusjakelu, jossa se ei ole tosi (vastaesimerkki).

a) $\{B \to A, C \to B, (C \to A) \to D\} \models D$

b) $\{A \to C, A \vee B, \neg D \to \neg B\} \models C \to D$

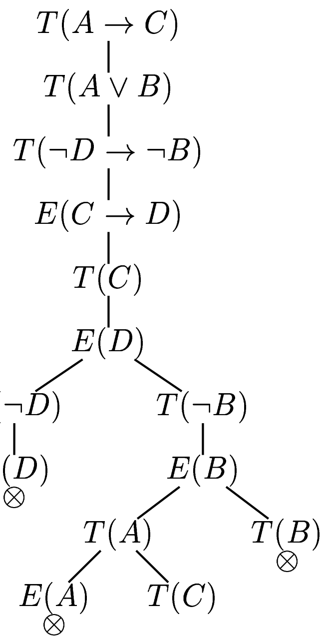
Ratk.
Loogista seuraavuutta tutkittaessa asetetaan taulun juureen kaikki lausejoukon lauseet totena ja tutkittava lause epätotena. Mikäli nyt kaikki puun haarat sulkeutuvat ristiriidan takia, tiedetään että tutkittava lause ei voi olla epätosi, mikäli kaikki lausejoukon lauseet ovat tosia, joten lause on looginen seuraavuus lausejoukosta.

a)



Koska taulu sulkeutui, on D looginen seuraus lausejoukosta.

b)

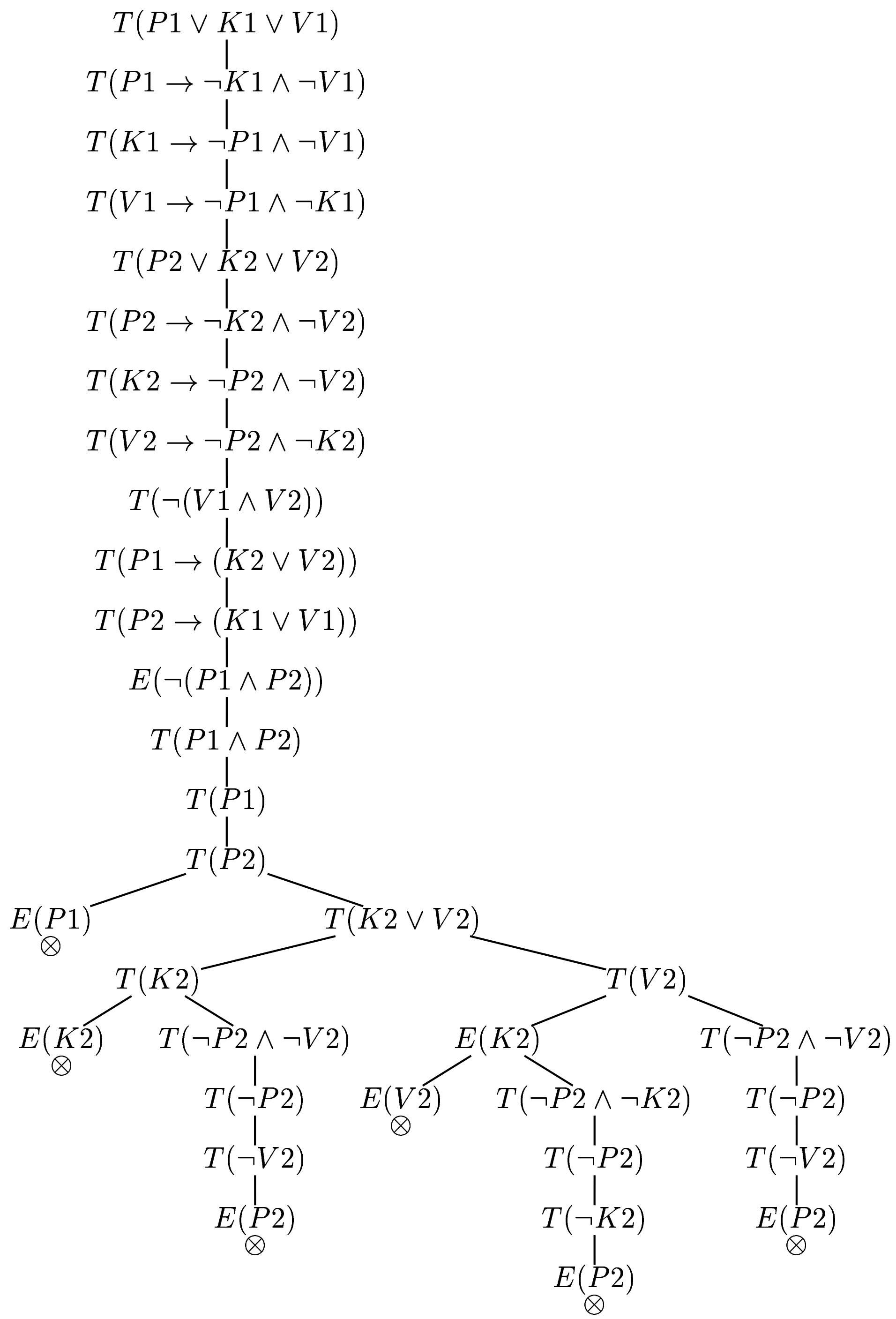


Taulu ei sulkeutunut, joten $C \to D$ ei ole looginen seuraavuus lausejoukosta. Puun aukiolevasta haarasta voidaan lukea vastaesimerkki, saadaan totuusjakelu $\mathcal{A} = \{A, C\}$.

T-79.144 **Syksy 2001**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 5 (opetusmoniste, kappaleet 4.4 - 6.4)
16 – 19.10.2001

1. Palataan insinööri Sörsselssönin laatimiin vaatimuksiin liikennevaloille yksisuuntaisten katujen risteyksessä. Osoita semanttisella taululla, että väittämä "liikennevalojen punaiset lamput eivät pala yhtäaikaisesti" seuraa loogisesti laatimastasi lausejoukosta.

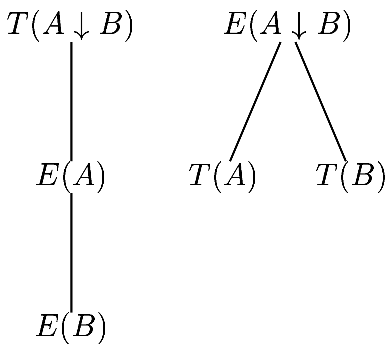
   Ratk.



2. Peircen nuoli määritellään seuraavasti:

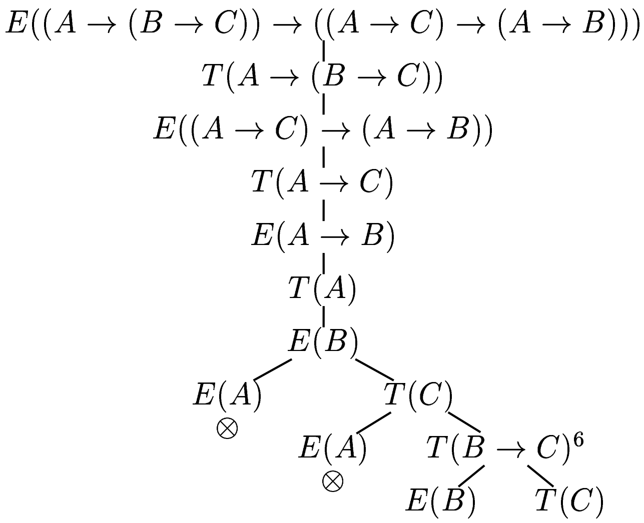
$$(A \downarrow B) \Leftrightarrow_{def} \neg A \wedge \neg B.$$

Määrittele sille semanttisen taulun säännöt.



3. Tutki semanttisella taululla pitääkö annettu väittämä paikkansa. Jos ei, anna perusteluksi totuusjakelu, jossa väite ei toteudu (vastamalli).

a) $\models (A \to (B \to C)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$
Ratk. Merkintä $\models \phi$ tarkoittaa siis, että lause ϕ on pätevä. Todistus siis tapahtuu konstruoimalla puu, jonka juuressa on lauseen negaatio.



Koska taulu ei sulkeutunut, lause ei ole pätevä. Vastamalli voidaan lukea avoimesta haarasta, tässä tapauksessa esim. oikeimmasta saadaan totuusjakelu $\mathcal{A} = \{A, C\}$.

b) $\models (\neg B \to (A \to C)) \to (A \to (B \vee C))$

Ratk.

$$E((\neg B \to (A \to C)) \to (A \to B \vee C))$$
$$T(\neg B \to (A \to C))$$
$$E(A \to B \vee C)$$
$$T(A)$$
$$E(B \vee C)$$
$$E(B)$$
$$E(C)$$
$$E(\neg B) \qquad\qquad T(A \to C)$$[6]
$$T(B) \qquad\quad F(A) \qquad\quad T(C)$$
$$\otimes \qquad\qquad \otimes \qquad\qquad \otimes$$

Taulu sulkeutui, joten lause on pätevä.

4. Osoita Hilbertin ja Suppesin todistusjärjestelmillä (opetusmoniste, kappaleet 5.1 ja 5.2) seuraavat väittämät.

a) $\vdash P \to P$

Ratk. (Hilbert)

1.	$(P \to ((P \to P) \to P))$	[A1]
2.	$((P \to ((P \to P) \to P)) \to$ $((P \to (P \to P)) \to (P \to P)))$	[A2]
3.	$((P \to (P \to P)) \to (P \to P))$	[MP:1,2]
4.	$(P \to (P \to P))$	[A1]
5.	$(P \to P)$	[MP:3,4]

(Suppes)

1.	P	[apuoletus]
2.	$\neg\neg P$	[KNT]
3.	P	[KNE]
4.	$P \to P$	[ET:1,3]

b) $\{P \to Q, Q \to R\} \vdash P \to R$

Ratk. (Hilbert)

1.	$(Q \to R)$	[P2]
2.	$((Q \to R) \to (P \to (Q \to R)))$	[A1]
3.	$(P \to (Q \to R))$	[MP:1,2]
4.	$((P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R)))$	[A2]
5.	$((P \to Q) \to (P \to R))$	[MP:3,4]
6.	$(P \to Q)$	[P1]
7.	$(P \to R)$	[MP:5,6]

(Suppes)

1.	$P \to Q$	[P1]
2.	$Q \to R$	[P2]
3.	P	[apuoletus]
4.	$\quad Q$	[MP:3,2]
5.	$\quad R$	[MP:4,3]
6.	$P \to R$	[ET:3,5]

c) $\{P, Q \to (P \to R)\} \vdash Q \to R$
Ratk. (Hilbert)

1.	P	[P1]
2.	$(Q \to (P \to R))$	[P2]
3.	$(P \to (Q \to P))$	[A1]
4.	$(Q \to P)$	[MP:1,3]
5.	$((Q \to (P \to R)) \to ((Q \to P) \to (Q \to R)))$	[A2]
6.	$((Q \to P) \to (Q \to R))$	[MP:2,5]
7.	$(Q \to R)$	[MP:4,6]

(Suppes)

1.	P	[P1]
2.	$Q \to (P \to R)$	[P2]
3.	Q	[apuoletus]
4.	$\quad P \to R$	[MP:3,2]
5.	$\quad R$	[MP:1,4]
6.	$Q \to R$	[ET:3,5]

5. Hae seuraavien lauseiden disjunktiivinen ja konjunktiivinen normaalimuoto (1) muunnossääntöjä käyttäen ja (2) semanttisen taulun avulla.

a) $A \to (B \to C)$
Ratk. Poistetaan lauseesta ensin implikaatiot.

$$\begin{aligned} A \to &(B \to C) \\ &\equiv \neg A \vee (\neg B \vee C) \\ &\equiv \neg A \vee \neg B \vee C \end{aligned}$$

Näin syntynyt muoto on sekä konjunktiivinen että disjunktiivinen normaalimuoto. Haettaessa disjunktiivista normaalimuotoa semanttisen taulun avulla lähdetään liikkeelle solmusta, jossa lause esiintyy totetena:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & T(A \to (B \to C)) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\ E(A) & & T(B \to C) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & E(B) & & T(C) \end{tikzcd}$$

Nyt avoimista haaroista saadaan luettua disjunktit. Tässä tapauksessa niissä kussakin on vain 1 literaali. Saadaan siis $\neg A \vee \neg B \vee C$, joka on sama kuin muunnossäännöillä. Konjunktiivinen normaalimuoto haetaan taulusta, jossa juurena on lause epätotena:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] E(A \to (B \to C)) \arrow[d, dash] \\ T(A) \arrow[d, dash] \\ E(B \to C) \arrow[d, dash] \\ T(B) \arrow[d, dash] \\ E(C) \end{tikzcd}$$

Avoimesta haarasta saadaan lause $A \wedge B \wedge \neg C$, josta saadaan negatoimalla ja De Morganin sääntöä soveltamalla muoto $\neg A \vee \neg B \vee C$, joka on haluttu normaalimuoto.

b) $\neg A \leftrightarrow ((A \vee \neg B) \to B)$

Ratk. Poistetaan lauseesta ensin ekvivalenssi ja implikaatiot:

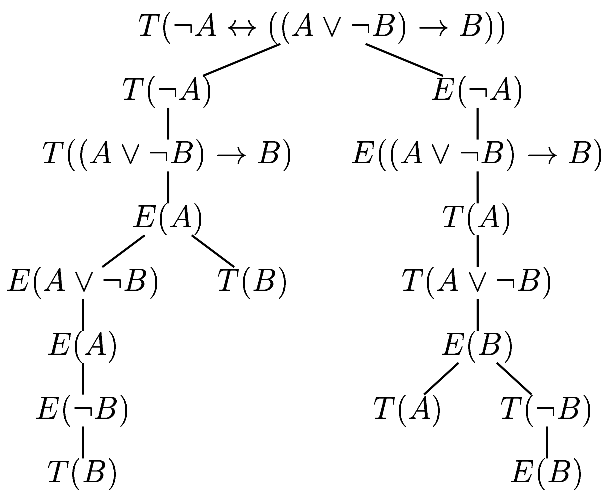
$$
\begin{aligned}
&\neg A \leftrightarrow ((A \vee \neg B) \to B) \\
&\quad \equiv (\neg A \to ((A \vee \neg B) \to B)) \wedge (((A \vee \neg B) \to B) \to \neg A) \\
&\quad \equiv (A \vee (\neg(A \vee \neg B) \vee B)) \wedge (\neg(\neg(A \vee \neg B) \vee B) \vee \neg A) \\
&\quad \equiv (A \vee ((\neg A \wedge B) \vee B)) \wedge (((A \vee \neg B) \wedge \neg B) \vee \neg A) \\
&\quad \equiv (A \vee ((\neg A \vee B) \wedge (B \vee B))) \wedge ((A \vee \neg B \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A)) \\
&\quad \equiv (A \vee \neg A \vee B) \wedge (A \vee B) \wedge (A \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \\
&\quad \equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)
\end{aligned}
$$

Tämä on konjunktiivinen normaalimuoto. Käytetään seuraavaksi konjunktion distributiivisuutta disjunktion yli, jolloin päädytään muotoon:

$$
\begin{aligned}
&(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \\
&\quad \equiv (A \wedge (\neg A \vee \neg B)) \vee (B \wedge (\neg A \vee \neg B)) \\
&\quad \equiv (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (B \wedge \neg B) \\
&\quad \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)
\end{aligned}
$$

Viimeisessä vaiheessa on käytetty sievennyssääntöjä, joissa moninkertaiset esiintymät samassa konjunktissa on eliminoitu samoin kuin konjuntit, joissa on esiintynyt sekä literaali, että sen komplementti.

Tarkastelu tauluilla:



Taulusta avoimia haaroja lukemalla saadaan muoto $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$, joka on sama kuin muunnossäännöillä. Konjuntiivinen normaalimuoto samalla periaatteella kuin a-kohdassa.

c) $\neg((A \leftrightarrow \neg B) \to C)$

$$\begin{aligned}
&\neg((A \leftrightarrow \neg B) \to C) \\
&\qquad \equiv \neg((A \to \neg B) \wedge (\neg B \to A) \to C) && [\leftrightarrow e] \\
&\qquad \equiv \neg(\neg((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg\neg B \vee A)) \vee C) && [\to e] \\
&\qquad \equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) \wedge \neg C \ (*) && [\neg\neg e, DM]
\end{aligned}$$

Tämä onkin jo konjuntiivinen normaalimuoto. Käytetään seuraavaksi konjunktion distributiivisuutta disjunktion yli:

$$\begin{aligned}
(*) &\equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg C)) \\
&\equiv (\neg A \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg C))) \vee \\
&\qquad (\neg B \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg C))) \\
&\equiv (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge A \wedge \neg C) \vee \\
&\qquad (\neg B \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge A \wedge \neg C) \\
&\equiv (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)
\end{aligned}$$

Lause on disjunktiivisessa normaalimuodossa. Viimeisessä vaiheessa on jätetty loogisesti epätodet literaalien konjuktiot pois (ts. ne, joissa esintyy jokin atominen lause ja sen negaatio).

d) $P_1 \wedge P_2 \leftrightarrow (P_1 \to P_2) \vee (P_2 \to P_3)$

Ratk.

Tehtävän laadinnassa kävi sikäli mielenkiintoisesti, että ekvivalenssin oikealla puolella oleva termi on pätevä. Nyt analyysi voidaan tehdä, korvaamalla se aina todella lauseella $\top$. Saadaan:

$$\begin{aligned}
&P_1 \wedge P_2 \leftrightarrow \top \\
&\quad \equiv (P_1 \wedge P_2 \to \top) \wedge (\top \to P_1 \wedge P_2) \\
&\quad \equiv (\neg(P_1 \wedge P_2) \vee \top) \wedge (\neg\top \vee (P_1 \wedge P_2)) \\
&\quad \equiv (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \top) \wedge (\bot \vee P_1) \wedge (\bot \vee P_2) \\
&\quad \equiv P_1 \wedge P_2
\end{aligned}$$

Nyt sievennyssääntöjä voi soveltaa siten, että ensimmäinen konjunkti on aina tosi ja kahdessa viimeisessä ensimmäiset termit voi poistaa, koska ne ovat aina epätosia. Syntynyt tulos on sekä KNM että DNM.

6. Hae KNM:t seuraaville lauseille muunnossäännöillä ja semantisella taululla.

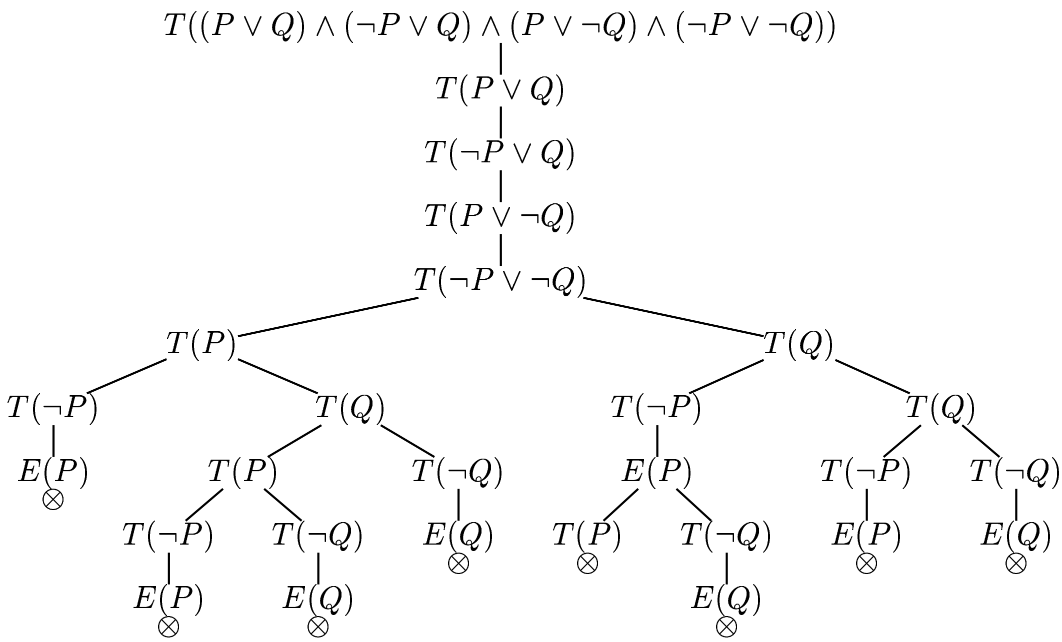
a) $(P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q)$
Ratk. Muuntamisessa käytetään disjunktion distributiivisuutta konjunktion yli:

$$
\begin{aligned}
&(P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q) \\
&\quad \equiv ((P \wedge \neg P) \vee Q) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee \neg Q) \\
&\quad \equiv (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)
\end{aligned}
$$

b) $(P_1 \wedge \neg P_1) \vee \cdots \vee (P_n \wedge \neg P_n)$
Ratk. Muuntaminen etenee samoilla säännöillä. Kuten a)-kohdassakin, lopputulokseen tulevat kaikki kombinaatiot (2^n) totuusarvoille:

$$
\begin{aligned}
&(P_1 \wedge \neg P_1) \ldots (P_n \wedge \neg P_n) \\
&\quad \equiv (P_1 \vee \cdots \vee P_n) \wedge (\neg P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n) \wedge (\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n)
\end{aligned}
$$

c) Osoita semanttisella taululla, että a)-kohdassa muodostettu KNM on toteutumaton.
Ratk. Osoittaminen tapahtuu lähtemällä liikkeelle semanttisesta taulusta, jonka juuressa on lause todeksi asetettuna. Jos lause on toteutumaton, taulu on ristiriitainen.



T-79.144 **Syksy 2001**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 6 (opetusmoniste, kappaleet 6.5 - 7.4)
16 – 19.10.2001

1. Hae lauseelle $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ klausuuliesitys.

Ratk. Lähdetään poistamaan implikaatiot:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & (A \to ((A \to A) \to A)) & \to & ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \\
\equiv & \neg(A \to ((A \to A) \to A)) & \vee & ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \\
\equiv & \neg(\neg A \vee ((A \to A) \to A)) & \vee & ((\neg A \vee (A \to A)) \to (A \to A)) \\
\equiv & \neg(\neg A \vee (\neg(\neg A \vee A) \vee A)) & \vee & (\neg(\neg A \vee (\neg A \vee A)) \vee (\neg A \vee A))
\end{array}
$$

Edelleen viedään negaatiot atomilauseiden eteen:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \neg(\neg A \vee (\neg(\neg A \vee A) \vee A)) & \vee & (\neg(\neg A \vee (\neg A \vee A)) \vee (\neg A \vee A)) \\
\equiv & (\neg\neg A \wedge \neg(\neg(\neg A \vee A) \vee A)) & \vee & ((\neg\neg A \wedge \neg(\neg A \vee A)) \vee (\neg A \vee A)) \\
\equiv & (A \wedge (\neg\neg(\neg A \vee A) \wedge \neg A)) & \vee & ((A \wedge \neg(\neg A \vee A)) \vee (\neg A \vee A)) \\
\equiv & (A \wedge ((\neg A \vee A) \wedge \neg A)) & \vee & ((A \wedge (A \wedge \neg A)) \vee (\neg A \vee A))
\end{array}
$$

Siirretään distribuutiosäännöillä disjunktiot sisään ja konjunktiot ulos:

$$
\begin{array}{rl}
 & (A \wedge ((\neg A \vee A) \wedge \neg A)) \quad \vee \quad ((A \wedge (A \wedge \neg A)) \vee (\neg A \vee A)) \\
\equiv & (A \wedge ((\neg A \vee A) \wedge \neg A)) \quad \vee \quad ((A \vee (\neg A \vee A)) \wedge ((A \wedge \neg A) \vee (\neg A \vee A))) \\
\equiv & (A \wedge ((\neg A \vee A) \wedge \neg A)) \quad \vee \quad ((A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg A \vee A)) \\
\equiv & (A \vee ((A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg A \vee A)) \wedge \\
 & (\neg A \vee A) \wedge \neg A) \vee ((A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg A \vee A)) \\
\equiv & (A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee \neg A \vee A) \wedge \\
 & (\neg A \vee A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge \\
 & (\neg A \vee A \vee \neg A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge \\
 & (\neg A \vee \neg A \vee \neg A \vee A)
\end{array}
$$

Kun tulokseen sovelletaan normaalimuotojen sievennyssääntöä, jossa poistetaan disjunktiot, joissa esiintyy literaali ja sen komplementti, havaitaan, että kaikki syntyneet 9 klausuulia eliminoituvat. Tuloksena saatava klausuulijoukko on siis tyhjä ($\emptyset$), ja on siten aina tosi. Tämä korreloi hienosti sen kanssa, että annettu lause on pätevä (voi tarkistaa esim. semanttisella taululla).

2. Tarkastellaan klausuulijoukkoa:

$$\begin{aligned} S \;=\; \{ & \{A_0, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{A_1, A_2\}, \{\neg A_1, \neg A_2\}, \ldots, \\ & \{A_{n-1}, A_n\}, \{\neg A_{n-1}, \neg A_n\}, \{A_n, A_0\}, \{\neg A_n, \neg A_0\} \} \end{aligned}$$

Anna totuusjakelu $\mathcal{A}$ siten, että $\mathcal{A} \models S$.

Ratk.

Tarkastellaan joukon S kahta ensimmäistä klausuulia. Ne voidaan kaavana kirjoittaa muodossa $(A_0 \vee A_1) \wedge (\neg A_0 \vee \neg A_1)$. Tällä lauseella on mallit $\mathcal{A}_1 = \{A_0\}$ ja $\mathcal{A}_2 = \{A_1\}$, eli se kuvaa ehdoton tai operaatiota (XOR). Näin ollen koko joukko kuvaa kaavaa:

$$(A_0 \underline{\vee} A_1) \wedge (A_1 \underline{\vee} A_2) \wedge \cdots \wedge (A_n \underline{\vee} A_0)$$

Tarkastellaan kaavaa n:n kahdella arvolla. Kun $n = 1$ lause saa muodon $(A_0 \underline{\vee} A_1) \wedge (A_1 \underline{\vee} A_0)$. Kun tässä valitaan A_0 todeksi, seuraa siitä, että A_1 on epätosi. Nyt molemmat konjunktit toteutuvat. Vastaavasti kun valitaan A_0 epätodeksi.

Nyt jos $n = 2$, kaava on muotoa $(A_0 \underline{\vee} A_1) \wedge (A_1 \underline{\vee} A_2) \wedge (A_2 \underline{\vee} A_0)$. Jos tässä valitsee A_0:n todeksi, seuraa siitä, että A_1 on epätosi ja taas A_2 tosi. Nyt viimeinen ehdoton tai kuitenkin edellyttäisi toteutuakseen, että A_0 on epätosi. Tämä aiheuttaa ristiriidan ja näin ei saada mallia. Jos A_0 valittiin aluksi epätodeksi, syntyy samanlainen ristiriita. Näin ollen tässä tapauksessa joukolla ei ole mallia.

Tarkastelun voi yleistää siten, että jos n on pariton saadaan edellämainitulla tekniikalla 2 mallia ja jos n on parillinen, ei malleja ole.

3. Horn-klausuuli on klausuuli, jossa on täsmälleen yksi positiivinen literaali. Olkoon $\mathcal{A}_1$ ja $\mathcal{A}_2$ Horn-klausuulien joukon S malleja. Osoita, että myös $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ on S:n malli.

Ratk.

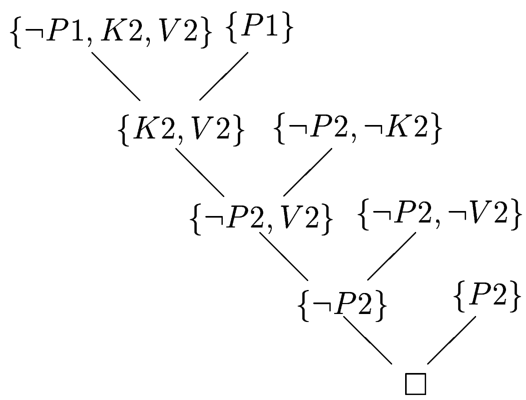
Todistus ristiriidan kautta. Oletetaan $\mathcal{A} \not\models S$. Tällöin joukossa S on klausuuli $\{A, \neg B_1, \ldots, \neg B_2\}$, joka ei toteudu. Jotta näin olisi, pitää olla $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{A}$ ja $A \notin \mathcal{A}$. Joukko-opillisen leikkauksen määritelmän mukaan pitää myös olla $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{A}_1$ ja $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{A}_2$. Koska $\mathcal{A}_1$ ja $\mathcal{A}_2$ ovat klausuulijoukon S malleja, pitää olla myös $A \in \mathcal{A}_1$ ja $A \in \mathcal{A}_2$. Tällöin kuitenkin $A \in \mathcal{A}$ leikkauksen määritelmän perusteella, ja tämä aiheuttaa ristiriidan. Siis $\mathcal{A} \models S$. $\square$

4. Taannoin tutustuimme insinööri Sörsselssönin laatimaan spesifikaatioon yksisuuntaisen risteyksen liikennevaloille. Muunna lauseet klausuulimuotoon ja osoita resoluutiolla, että liikennevalojen punaiset lamput eivät pala yhtäaikaisesti.

Ratk.
Muunnetaan lauseet konjunktiiviseen normaalimuotoon ja klausuuleiksi. Taulukossa on viimeisenä todistettavan kaavan negaatio $P1 \wedge P2$.

Lause		Klausuulit
$Pi \vee Ki \vee Vi$		$\{Pi, Ki, Vi\}$
$Pi \to \neg Ki \wedge \neg Vi$	$\equiv \neg Pi \vee (\neg Ki \wedge \neg Vi)$ $\equiv (\neg Pi \vee \neg Ki) \wedge (\neg Pi \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Pi, \neg Vi\}$
$Ki \to \neg Pi \wedge \neg Vi$	$\equiv (\neg Ki \vee \neg Pi) \wedge (\neg Ki \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$Vi \to \neg Pi \wedge \neg Ki$	$\equiv (\neg Vi \vee \neg Pi) \wedge (\neg Vi \vee \neg Ki)$	$\{\neg Pi, \neg Vi\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$\neg(V1 \wedge V2)$	$\equiv \neg V1 \vee \neg V2$	$\{\neg V1, \neg V2\}$
$P1 \to (K2 \vee V2)$	$\equiv \neg P1 \vee K2 \vee V2$	$\{\neg P1, K2, V2\}$
$P2 \to (K1 \vee V1)$	$\equiv \neg P2 \vee K1 \vee V1$	$\{\neg P2, K1, V1\}$
$P1 \wedge P2$		$\{P1\}, \{P2\}$

Osoitamme seuraavaksi taulukossa annettujen klausuulien joukon toteutumattomaksi (tyhjä klausuuli $\Box$ tarkoittaa ristiriitaa), jolloin lause $\neg(P1 \wedge P2)$ on johdettavissa muista klausuuleista:



5. Laaditaan asiantuntijajärjestelmä, jolla on tarkoitus tutkia, mitkä kemialliset reaktiot ovat mahdollisia. Tarkastellaan reaktioita:

(1) $\mathrm{MgO} + \mathrm{H_2} \to \mathrm{Mg} + \mathrm{H_2O}$

(2) $\mathrm{C} + \mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2}$

(3) $\mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O} \to \mathrm{H_2CO_3}$

a) Esitä ylläolevat reaktiot lauselogiikan avulla klausuulimuodossa. Lisää klausuulijoukkoon tieto siitä, että aluksi saatavilla on aineita: $\mathrm{MgO}, \mathrm{H_2}, \mathrm{O_2}$ ja C.

b) Osoita resoluutiolla, että yllä olevassa tilanteessa on mahdollista saada reaktiotuotteena $\mathrm{H_2CO_3}$:a.

Ratk.
Mallinnetaan kemialliset reaktiot implikaatioiksi, jotka muutetaan sitten klausuulimuotoon. Tuloksena saadaan klausuulit:

(1)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{MgO} + \mathrm{H_2} \to \mathrm{Mg} + \mathrm{H_2O} \\
\Longrightarrow&\mathrm{MgO} \wedge \mathrm{H_2} \to \mathrm{Mg} \wedge \mathrm{H_2O} \\
\Longrightarrow&\neg\mathrm{MgO} \vee \neg\mathrm{H_2} \vee (\mathrm{Mg} \wedge \mathrm{H_2O}) \\
\Longrightarrow&(\neg\mathrm{MgO} \vee \neg\mathrm{H_2} \vee \mathrm{Mg}) \wedge (\neg\mathrm{MgO} \vee \neg\mathrm{H_2} \vee \mathrm{H_2O})
\end{aligned}$$

Reaktiosta syntyi siis kaksi klausuulia: $\{\neg\mathrm{MgO}, \neg\mathrm{H_2}, \mathrm{Mg}\}$ sekä $\{\neg\mathrm{MgO}, \neg\mathrm{H_2}, \mathrm{H_2O}\}$.

(2)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{C} + \mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2} \\
\Longrightarrow&\mathrm{C} \wedge \mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2} \\
\Longrightarrow&\neg\mathrm{C} \vee \neg\mathrm{O_2} \vee \mathrm{CO_2} \\
\Longrightarrow&\{\neg\mathrm{C}, \neg\mathrm{O_2}, \mathrm{CO_2}\}
\end{aligned}$$

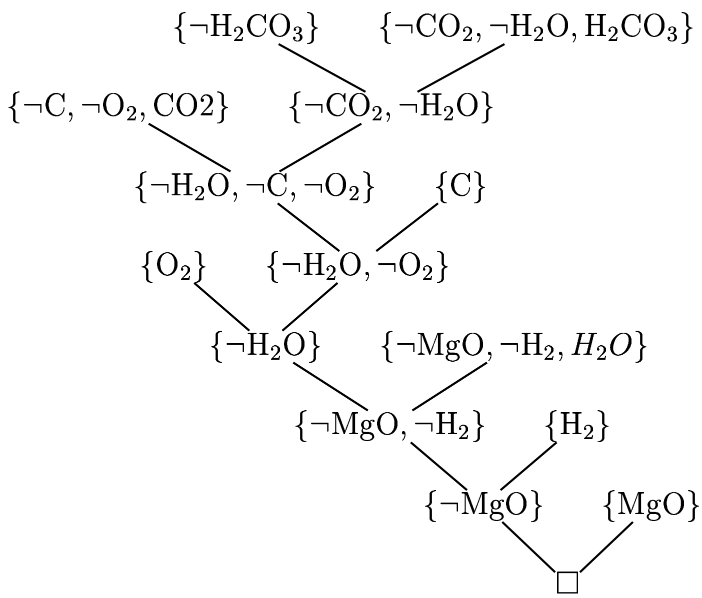
(3)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O} \to \mathrm{H_2CO_3} \\
\Longrightarrow&\mathrm{CO_2} \wedge \mathrm{H_2O} \to \mathrm{H_2CO_3} \\
\Longrightarrow&\neg\mathrm{CO_2} \vee \neg\mathrm{H_2O} \vee \mathrm{H_2CO_3} \\
\Longrightarrow&\{\neg\mathrm{CO_2}, \neg\mathrm{H_2O}, \mathrm{H_2CO_3}\}
\end{aligned}$$

Lisäksi lähtöaineista saadaan neljän klausuulin joukko:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{MgO} \wedge \mathrm{H_2} \wedge \mathrm{O_2} \wedge \mathrm{C} \\
\Longrightarrow&\{\mathrm{MgO}\}, \{\mathrm{H_2}\}, \{\mathrm{O_2}\}\{\mathrm{C}\}
\end{aligned}$$

Merkitään ylläolevaa klausuuliijoukkoa Σ. Nyt halutaan todistaa, että $\Sigma \models \mathrm{H_2CO_3}$. Todistus tehdään osoittamalla, että $\Sigma \cup \{\neg\mathrm{H_2CO_3}\}$ on toteutumaton:



♢ **6.** a) Muodosta resoluution täydellisyystodistuksen puukonstruktio klausuulijoukolle:

$$S = \{\{\neg A, \neg B\}, \{A, \neg B\}, \{\neg A, B, \neg C\}, \{A, B\}, \{\neg A, B, C\}\}$$

b) Tutki, millaisia klausuuleja S:n binääriklausuuleista (2 literaalia) voidaan johtaa. Muodostetaan klausuulijoukko S' lisäämällä nämä klausuulit S:ään.

c) Toista puukonstruktio S':lle.

d) Tutki muuttujajärjestyksen vaikutusta puun kokoon.

T-79.144 **Syksy 2001**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 7 (opetusmoniste, osa 1, kappale 8 ja osa 2, kappale 1)
30 – 31.10.2001

1. Konstruoi deterministinen Turingin kone, joka laskee syötteenä annetun binääriluvun seuraajan.

Ratk.
Esitetty ratkaisu on otettu C. Papadimitrioun kirjasta “Computational Complexity”. Deterministinen Turingin kone on siis nelikko $\langle A, S, s_0, t \rangle$, missä

- A on aakkosto,
- S on tilajoukko,
- $t : S \times A \to S \times A \times \{\to, \leftarrow, \downarrow\}$ tilansiirtofunktio ja
- $s_0 \in S$ alkutila.

Binääriluvun seuraajan laskevalle koneelle $S = \{s, q\}, A = \{0, 1\}$, $s_0 = s$ ja siirtofunktio on luettavissa seuraavasta taulukosta:

$p \in S$	$\sigma \in A$	$t(p, \sigma)$
s	0	$(s, 0, \to)$
s	1	$(s, 1, \to)$
s	$\sqcup$	$(q, \sqcup, \leftarrow)$
s	$\triangleright$	$(s, \triangleright \to)$
q	0	$(h, 1, -)$
q	1	$(q, 0, \leftarrow)$
q	$\triangleright$	$(h, \triangleright, \to)$

Syötteellä 1101 kone laskee seuraavasti: $(s, \triangleright, 1101) \overset{M}{\to} (s, \triangleright 1, 101) \overset{M}{\to} (s, \triangleright 11, 01) \overset{M}{\to} (s, \triangleright 110, 1) \overset{M}{\to} (s, \triangleright 1101, \epsilon) \overset{M}{\to} (s, \triangleright 1101\sqcup, \epsilon) \overset{M}{\to} (q, \triangleright 1101, \sqcup) \overset{M}{\to} (q, \triangleright 110, 0\sqcup) \overset{M}{\to} (h, \triangleright 11, 10\sqcup)$ eli se siirtyy ensin syötteen loppuun ja palaa sen jälkeen takaisin päin muuttaen ykköset nolliksi. Kohdatessaan ensimmäisen nollan se muuttuu ykköseksi ja laskenta päättyy. Jos luvun kaikki numerot ovat ykkösiä, on tulos sarja, jossa kaikki ovat nollia.

2. Osoita, että graafin 3-väritys kuuluu luokkaan **NP** redusoimalla se lauselogiikan toteutuvuusongelmaksi.

Ratk.

Tehtävänannossa pyydetään siis osoittamaan, että graafin 3-väritys ei ole vaikeampi ongelma kuin **NP**:ssä olevat. Itse ongelma on se, että voidaanko annetun graafin G solmut värjätä 3 värillä siten, että millään kahdella solmulla, joita yhdistää kaari, ei ole samaa väriä.

Olkoon graafin solmujen joukko $N = \{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ ja kaarien joukko $E \subseteq N^2$ (kaaret siis solmupareja). Käännettäessä ongelmaa lauselogiikkan, otettakoon käyttöön kullekin noodille atomilauseet R, G, B kuvaamaan, että solmu on punainen, vihreä tai sininen. Siis esim R_{n_1} tarkoittaa, että solmu n_1 on punainen.

Ensin tulee todeta, että jokaisella solmulla on väri ja että kaikilla se on uniikki. Tämän voi tehdä seuraavasti:

$$(R_n \lor G_n \lor B_n) \land (R_n \to (\neg G_n \land \neg B_n)) \land$$
$$(G_n \to (\neg R_n \land \neg B_n)) \land (B_n \to (\neg R_n \land \neg G_n))$$

Kaarella yhdistettyjen solmujen sama väri estetään kirjoittamalla seuraava kaava kaikille $n, m \in V$:

$$(R_n \to \neg R_m) \land (G_n \to \neg G_m) \land (B_n \to \neg B_m)$$

Koko käännös on edellä mainittujen elementtien konjunktio ja sillä on malli joss graafilla on 3-väritys. (todistus sivuutetaan)

3. Ilmaise seuraavat lauseet predikaattilogiikalla:

a) Jokin porteista on viallinen.

b) Tämä algoritmi on kaikista nopein.

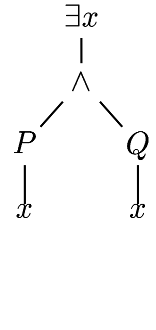
c) Kaikilla kurssin osanottajilla on työasema käytössään.

d) Vain yksi prosesseista voi kirjoittaa kuhunkin tiedostoon kerrallaan.

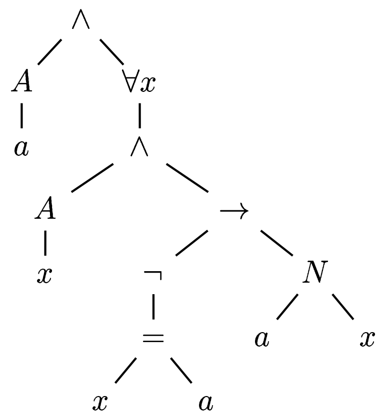
Mitä muotoa lauseet ovat? Piirrä a)- ja c)-kohtia vastaavat syntaksipuut.

Ratk.
Ratkaisussa on käytetty useaan otteeseen rajoitettuja universaali- ja eksistentiaalikvanttoreita. Jos halutaan ilmaista, että jokin ominaisuus $\phi(x)$ pätee kaikille predikaatin $P(x)$ toteuttaville alkioille x, kirjoitetaan $\forall x(P(x) \to \phi(x))$. Se, että ominaisuus $\phi(x)$ pätee jollekin predikaatin $P(x)$ toteuttavalle alkiolle x, ilmaistaan lauseella $\exists x(P(x) \land \phi(x))$. Tehtävässä predikaatti $P(x)$ ilmaisee usein alkion tyyppiä (esim. x on portti).

a) $\exists x(P(x) \land V(x))$, kun
$P(x) = x$ on portti.
$V(x) = x$ on viallinen.



b) $A(a) \wedge (\forall x(A(x) \wedge \neg(x = a) \rightarrow N(a, x))$, kun
$a =$ ko. algoritmi.
$A(x) = x$ on algoritmi.
$N(x, y) = x$ on y:tä nopeampi.



c) $\forall x(K(x) \rightarrow \exists y(T(y) \wedge R(x, y)))$, kun
$K(x) = x$ osallistuu kurssille.
$T(x) = x$ on työasema.
$R(x, y) = x$ käyttää y:tä.

d) $\forall x(T(x) \rightarrow \forall y \forall z(P(y) \wedge P(z) \wedge K(y, x) \wedge K(z, x) \rightarrow y = z))$, kun
$P(x) = x$ on prosessi.
$T(x) = x$ on tiedosto.
$K(x, y) = x$ kirjoittaa y:hyn.

Esitetyt ratkaisut eivät ole ainoita mahdollisia. Valinnan varaa on predikaatti-, funktio- ja vakiosymbolien määrittelyssä ja lauseiden rakenteessa.

4. Poista tarpeettomat sulut, ilman että lauseen merkitys muuttuu.

a) $(\forall y((\exists x(P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow L(x)))$

b) $((\exists x(\exists y(P(x, y) \vee Q(y, x)))) \leftrightarrow (\forall x(\neg K(f(x)))))$

c) $(\forall x(\forall y(A \wedge B)))$

Ratk.
Sulkujen poistamisessa käytettiin periaatetta, että uloimmat sulut voi jättää pois ja lisäksi, mikäli sulkujen sisällä oleva operaatio on presedenssiltään ulkopuolella olevaa vahvempi, sulut voidaan poistaa.

a) $\forall y((\exists x(P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow L(x))$
Tässä kaava on esitetty ilman uloimpia sulkuja. Tarkasteltaessa nyt uloimpia sulkuja, niin sisällä oleva operaatio on implikaatio ja ulkopuolella universaalinen kvantifiointi. Kvantifiointi on vahvempi, sulkuja ei voi poistaa. Tarkastellaan seuraavaksi sulkuja eksistenttikvanttorin ympärillä. Sisällä siis em. kvantifionti ja ulkopuolella implikaatio. Sulut voi poistaa ja kaava saa muodon $\forall y(\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow L(x))$. Jäljellä on vielä sulut konjunktion ympärillä. Ulkopuolella oleva kvantifiointi on vahvempi, sulkuja ei voi poistaa.

b) $\exists x \exists y(P(x,y) \vee Q(y,x)) \leftrightarrow \forall x(\neg K(f(x)))$

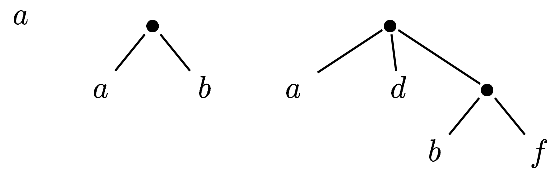
c) $\forall x \forall y(A \wedge B)$

5. Olkoon predikaattilogiikan kielessä vakiosymboli c, 1-paikkainen funktiosymboli f ja 2-paikkainen funktiosymboli g. Millaisia muuttujattomia termejä näistä voidaan muodostaa.

Ratk.
Käyttämällä ainoastaan elementtejä c ja f, voidaan muodostaa seuraava joukko termejä: $\{c, f(c), f^2(c), f^3(c), \dots\}$. Edelleen termejä voidaan laatia käyttämällä hyväksi funktiota g. Sen argumenteiksi voidaan valita mikä tahansa pari edellisistä, esim. saadaan termit $g(c,c)$ ja $g(f^3(c), f^{108}(c))$. Luonnollisesti sekä g:n että f:n argumenteiksi voidaan edelleen valita mitkä tahansa näin saaduista termeistä. Näin syntyy esim. $f(g(f^5(c), f^{13}(c)))$ ja $g(g(c, f(c)), f^8(c))$. Funktioiden sisennystä voi näin jatkaa mielivaltaisen monta askelta.

6. Luennoilla annettiin menettely binääripuiden esittämiseksi funktiosymbolien avulla. Yleistä konstruktio mielivaltaisille puille käyttämällä korkeintaan 3 vakio- ja funktiosymbolia.

Ratk.
Yleistys tapahtuu käyttämällä hyväksi sekä listojen että puiden notaatiota. Periaate on, että mielivaltainen puu esitetään sisäkkäisinä listoina, jotka kertovat kunkin solmun lapset. Olkoon tehtävässä esitetyt 3 vakio- ja funktiosymbolia e, tyhjä lista, $c \in \mathcal{F}_2$, 1. argumentti listan ensimmäinen alkio ja 2. loput listasta, ja $l \in \mathcal{F}_1$, lehtisolmu. Tarkastellaan seuraavia puita:



Näistä ensimmäinen esitetään annetulla notaatiolla muodossa $l(a)$, toinen $c(c(l(a), c(l(b), e)))$ ja kolmas saa muodon $c(c(l(a), e),\ c(l(d), e),\ c(l(b),\ c(l(f), e)))$.

7. Osoita, että jos $\forall x \phi(x)$ on lause ja t on muuttujaton termi, niin $\phi(t)$ on lause.

Ratk.
Opetusmonisteessa todetaan, että "kaava on *lause*, jos siinä ei ole vapaita muuttujaesiintymiä". Tehtävänannossa todetaan, että $\forall x \phi(x)$ on lause. $\phi(t)$ tarkoittaa kaavaa, jossa jokainen x:n esiintymä on korvattu termillä t. Tämä operaatio voidaan tehdä, mikäli termin t sisältämä muuttuja ei syntyneessä kaavassa joudu minkään kvanttorin sitomaksi (tehtävän kaava $\phi(x)$ siis voi sisältää muita kvanttoreita). Koska t on muuttujaton, ei vaaraa ole.

Edelleen $\phi(t)$ ei olisi lause, mikäli t sisältäisi vapaita muuttujaesiintymiä. Jälleen t:n muuttujattomuus poistaa tämän mahdollisuuden ja $\phi(t)$ on myös lause.

T-79.144 **Syksy 2001**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 8 (opetusmoniste, kappaleet 2.1 - 3.2)
6 – 9.11.2001

1. Olkoon universumina $\mathbb{N}^2 = \{\langle x, y\rangle | x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$. Valitse vakiosymbolille c ja funktiosymbolille $f \in \mathcal{F}_1$ tulkinnat siten, että koko universumi tulee nimetyksi.

Ratk.
Muodostetut lukuparit voi asettaa kaksiulotteiseen taulukkoon vaikkapa seuraavasti:

$$\begin{array}{ccccc}
\langle 0,0\rangle & \langle 0,1\rangle & \langle 0,2\rangle & \langle 0,3\rangle & \cdots \\
\langle 1,0\rangle & \langle 1,1\rangle & \langle 1,2\rangle & \langle 1,3\rangle & \cdots \\
\langle 2,0\rangle & \langle 2,1\rangle & \langle 2,2\rangle & \langle 2,3\rangle & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Tehtävän idea on sama kuin todistettaessa sitä, että kahden luonnollisen luvun pareja on yhtä monta kuin luonnollisia lukuja (joukot siis ovat yhtä mahtavat). Todistuksessa laaditaan bijektiivinen kuvaus luonnollisilta luvuilta lukupareille. Kuvauksessa $f(0) = \langle 0,0\rangle$ ja muilla arvoilla se etenee aina taulukon diagonaaleja pitkin. Esim. $f(1) = \langle 0,1\rangle$, $f(2) = \langle 1,0\rangle$ jne. Mikäli kuvaus etenisi rivejä tai sarakkeita pitkin, ei joukkojen yhtäsuuruutta saataisi osoitettua, koska rivit (sarakkeet) jatkuvat äärettömiin. Mielivaltainen diagonaali puolestaan on äärellinen.

Sovelluttuna logiikkaan, universumi saadaan peitettyä, mikäli vakion c tulkinta on $c^{\mathbb{N}^2} = \langle 0,0\rangle$, ja funktio laaditaan em. sääntöjen pohjalta, siis:

$$\begin{array}{ccccccc}
f(c) & = & \langle 0,1\rangle & f(f(c)) & = & \langle 1,0\rangle \\
f^3(c) & = & \langle 0,2\rangle & f^4(c) & = & \langle 1,1\rangle \\
\vdots & & & \vdots & &
\end{array}$$

Funktion lausekkeen voi esittää muodossa:

$$\begin{aligned}
f^{\mathbb{N}^2} : \langle x,y\rangle &\to \langle x',y'\rangle \\
x' &= g(x)(y+1) + (1-g(x))(x-1) \\
y' &= (1-g(x))(y+1)
\end{aligned}$$

Tässä $g(x)$ on nk. pulssifunktio:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x = 0 \\ 0, & \text{muutoin} \end{cases}$$

2. Graafi muodostuu solmujen joukosta S ja solmujen välisten kaarien $K \subseteq S \times S$ joukosta. Graafin solmuja s ja s' sanotaan vierekkäisiksi, jos niitä yhdistää kaari ($\langle s,s'\rangle \in K$). Olkoon C jokin värien joukko. Graafin *väritysongelmassa* on tarkoituksena löytää graafin solmuille värit joukosta C siten, että kaikilla vierekkäisillä solmuilla on eri värit.

a) Määrittele graafin väritysongelman ratkaisu predikaattilogiikan avulla.

b) Anna edellisen kohdan lausejoukolle malli ja

c) struktuuri, jossa se ei toteudu.

Ratk.

a) Graafista meitä kiinnostavat erityisesti kaaret, joiden esittämistä varten määritellään predikaatti $K(x, y)$ (graafissa on kaari solmusta x solmuun y). Värien esittämiseen on useita mahdollisuuksia.

(i) Yksi mahdollisuus on kiinnittää värien joukko ja esittää värit predikaatein. Jos joukossa C on värejä n kpl määritellään predikaatit $C_1(x), \ldots, C_n(n)$. Predikaatti $C_i(x)$ tarkoittaa, että solmu x on väriltään C_i. Ongelman määrittelyssä vaaditaan, että jokaisella solmulla on yksikäsitteinen väri ja että jos solmujen välillä on kaari, solmut ovat erivärisiset. Ensimmäisestä vaatimuksesta saadaan lauseet

$$\forall x(C_i(x) \leftrightarrow \neg C_1(x) \wedge \cdots \wedge \neg C_{i-1}(x) \wedge \neg C_{i+1} \wedge \cdots \wedge \neg C_n(x))$$

indeksin i arvoilla $1, \ldots, n$ (huomaa, että $\neg C_i(x)$ ei esiinny ekvivalenssin oikean puolen konjuktiossa). Toinen vaatimus esitetään jokaisen predikaatin $C_i(x)$ osalta erikseen:

$$\forall x \forall y(K(x, y) \rightarrow (C_i(x) \rightarrow \neg C_i(y))).$$

(ii) Toinen mahdollisuus on jättää värien määrittely avoimeksi ja ottaa käyttöön predikaatti $V(x, y)$ (solmun x väri on y). Solmun värin yksikäsitteisyys voidaan ilmaista lauseella

$$\forall x \forall y \forall z(V(x, y) \wedge V(x, z) \rightarrow y = z).$$

Siis, jos solmulla x on värit y ja z, nämä ovat itseasiassa sama väri (yhtäsuuruus predikaatti $=$ on tosi rakenteessa $\mathcal{A}$, jos ja vain jos predikaatin argumenttien tulkinnat ovat samat rakenteessa $\mathcal{A}$). Vierekkäisten solmujen erivärisyys saadaan puettua lauseeksi

$$\forall x \forall y \forall z(K(x, y) \rightarrow (V(x, z) \rightarrow \neg V(y, z)).$$

Eli, jos graafissa on kaari solmusta x solmuun y ja solmu x on väriltään z, solmu y ei ole väriltään z.

(iii) Kolmantena mahdollisuutena on esittää väri funktiosymbolin v avulla. Termi $v(x)$ tarkoittaa solmun x väriä. Tässä tapauksessa värin yksikäsitteisyyttä ei tarvitse erikseen määritellä (funktion arvo on aina yksikäsitteinen). Erivärisyydelle saadaan lause

$$\forall x \forall y (K(x,y) \rightarrow \neg(v(x) = v(y))).$$

b) Annetaan malli kohdan (i) lauseille tapauksessa $n = 2$. Määritellään rakenne $\mathcal{A}$, jonka universumina on $A = \{a_1, a_2\}$ (kaksi solmua). Predikaatin K tulkinta on $K^{\mathcal{A}} = \{\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_1\rangle\}$ (graafissa on kaaret solmusta a_1 solmuun a_2 ja solmusta a_2 solmuun a_1). Predikaattien C_1 ja C_2 tulkinnat ovat $C_1^{\mathcal{A}} = \{a_1\}$ ja $C_2^{\mathcal{A}} = \{a_2\}$ (toinen solmuista on siis väriä C_1 ja toinen väriä C_2). Lisäksi joudumme olettamaan, että kieleen sisältyy vakiosymbolit s_1 ja s_2, joiden tulkintoina rakenteessa $\mathcal{A}$ ovat a_1 ja a_2. Tämä johtuu rakenteen määritelmästä, jossa edellytetään että kaikille universumin A alkioille a on olemassa muuttujaton termi, siten että $t^{\mathcal{A}} = a$ (jokainen universumin alkio on täten esitettävissä jollain termillä eli "nimettävissä").

Tarkistetaan nyt totuusmääritelmän avulla, että lauseet

$$\forall x (C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$$

$$\forall x \forall y (K(x,y) \rightarrow (C_1(x) \rightarrow \neg C_1(y))$$

ja

$$\forall x \forall y (K(x,y) \rightarrow (C_2(x) \rightarrow \neg C_2(y))$$

toteutuvat rakenteessa $\mathcal{A}$ (eli $\mathcal{A}$ on lauseiden malli). Huomaa että lauseista ensimmäinen on ekvivalentti lauseen

$$\forall x (C_2(x) \leftrightarrow \neg C_1(x))$$

kanssa, joka myös kuuluu lausejoukkoon tapauksessa $n = 2$. Koska s_1 ja s_2 ovat ainoat termit,

$$\mathcal{A} \models \forall x (C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$$

jos ja vain jos

$$\mathcal{A} \models (C_1(s_1) \leftrightarrow \neg C_2(s_1)) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{A} \models (C_1(s_2) \leftrightarrow \neg C_2(s_2))$$

Koska $s_1^{\mathcal{A}} \in C_1^{\mathcal{A}}$,

$$\mathcal{A} \models C_1(s_1)$$

ja koska $s_1^{\mathcal{A}} \notin C_2^{\mathcal{A}}$,

$$\mathcal{A} \not\models C_2(s_1)$$

Siis

$$\mathcal{A} \models (C_1(s_1) \leftrightarrow \neg C_2(s_1))$$

Vastaavasti osoitetaan, että $\mathcal{A} \models (C_1(s_2) \leftrightarrow \neg C_2(s_2))$, joten $\mathcal{A} \models \forall x(C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$ seuraa.
Vastaavasti

$$\mathcal{A} \models \forall x \forall y(K(x,y) \rightarrow (C_1(x) \rightarrow \neg C_1(y))$$

jos ja vain jos lauseet

$$\begin{array}{l} K(s_1,s_1) \rightarrow (C_1(s_1) \rightarrow \neg C_1(s_1)), \\ K(s_1,s_2) \rightarrow (C_1(s_1) \rightarrow \neg C_1(s_2)), \\ K(s_2,s_1) \rightarrow (C_1(s_2) \rightarrow \neg C_1(s_1)) \ \text{ ja} \\ K(s_2,s_2) \rightarrow (C_1(s_2) \rightarrow \neg C_1(s_2)) \end{array}$$

ovat tosia rakenteessa A. Koska parit $\langle s_1^{\mathcal{A}}, s_1^{\mathcal{A}} \rangle$ ja $\langle s_2^{\mathcal{A}}, s_2^{\mathcal{A}} \rangle$ eivät kuulu tulkintaan $K^{\mathcal{A}}$, atomiset lauseet $K(s_1,s_1)$ ja $K(s_2,s_2)$ ovat epätosia rakenteessa $\mathcal{A}$, joten implikaation totuusmääritelmän perusteella edellä annetuista neljästä lauseesta ensimmäinen ja viimeinen ovat tosia rakentessa $\mathcal{A}$. Koska pari $\langle s_1^{\mathcal{A}}, s_2^{\mathcal{A}} \rangle$ kuuluu tulkintaan $K^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \models K(s_1,s_2)$ ja lauseista toinen on tosi rakenteessa $\mathcal{A}$, jos ja vain jos $\mathcal{A} \models C_1(s_1) \rightarrow \neg C_1(s_2)$. Tämä pitää paikkansa, sillä $s_1^{\mathcal{A}} \in C_1^{\mathcal{A}}$ ja $s_2^{\mathcal{A}} \notin C_1^{\mathcal{A}}$, joten $\mathcal{A} \models C_1(s_1)$ ja $\mathcal{A} \models \neg C_1(s_2)$. Myös kolmas lause toteutuu. Erona edelliseen on, että implikaatio $C_1(s_2) \rightarrow \neg C_1(s_1)$ on tosi rakenteessa $\mathcal{A}$, koska $\mathcal{A} \not\models C_1(s_2)$. Siis $\mathcal{A}$ on malli lauseelle $\forall x \forall y(K(x,y) \rightarrow (C_1(x) \rightarrow \neg C_1(y))$.

Symmetriasyistä $\mathcal{A}$ on myös lauseen $\forall x \forall y(K(x,y) \rightarrow (C_2(x) \rightarrow \neg C_2(y))$ malli. Olemme siis osoittaneet, että $\mathcal{A}$ on lausejoukon malli. Sama rakenne on malli myös tapauksesta, jossa värejä on useampia kuin kaksi.

Malleista tulee monimutkaisempia, jos solmujen väritys esitetään vaihtoehtojen (ii) ja (iii) mukaisesti.

c) Määritellään rakenne $\mathcal{A}$ tapauksessa $n = 2$, jossa lausejoukko ei toteudu. Valitaan universumiksi $A = \{a\}$ (yksi solmu) ja predikaatin K tulkinnaksi esim. $K^{\mathcal{A}} = \{\langle a,a \rangle\}$. Olkoon s vakiosymboli, jonka tulkintana on a. Nyt

$$\forall x(C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x)$$

ei toteudu rakenteessa $\mathcal{A}$, jos

$$\mathcal{A} \not\models C_1(s) \leftrightarrow \neg C_2(s)$$

Valitaan siis väripredikaattien tulkinnat siten, että

$$\mathcal{A} \models C_1(s) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{A} \models C_2(s)$$

asettamalla

$$C_1^{\mathcal{A}} = C_2^{\mathcal{A}} = \{a\}$$

Tällöin $\mathcal{A}$ ei voi olla lausejoukon malli.

3. Osoita, että seuraavat lauseet eivät ole päteviä konstruoimalla struktuuri, jossa lause on epätosi (vastamalli).

a) $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$

b) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \to \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

c) $\neg \forall x(P(x) \to R(x)) \vee \neg \forall x(P(x) \to \neg R(x))$

Ratk.

a) Olkoon $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ ja $P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$. Nyt $\forall x \exists y P(x, y)$ pätee (kummallekin alkiolle 1. positiossa löytyy vastine). Toisaalta $\exists y \forall x P(x, y)$ ei päde koska ei ole predikaatin tulkinnassa ei ole sellaista alkiota 2. positiossa, jolle löytyisi parit siten, että molemmat alkiot esiintyisivät 1. positiossa. Näin ollen implikaatio on epätosi.

b) Olkoon $\mathcal{A} = \{1\}$ ja $P^{\mathcal{A}} = \{1\}, Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$. Nyt implikaation vasen puoli on tosi ja oikea epätosi ja struktuuri näin vastaesimerkki.

c) Lauseessa pitäisi saada disjunktio epätodeksi. Tämä edellyttää, että molemmat argumentit ovat epätosia. Koska niiden edessä on negaatio, pitää siis molemmilla puolilla negaatioiden sisällä oleva osuus olla tosi.

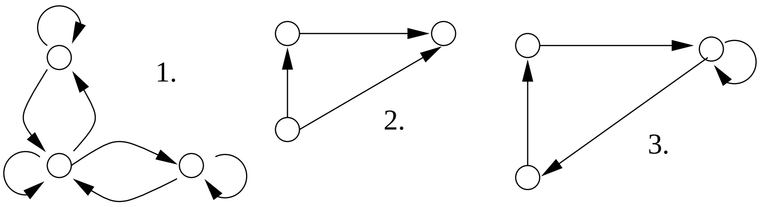
   Olkoon $\mathcal{A} = \{1\}$ ja $P^{\mathcal{A}} = \emptyset, R^{\mathcal{A}} = \{1\}$. Nyt $\forall x(P(x) \to R(x))$ on tosi, koska sen vasen puoli on epätosi. Samalla argumentilla $\forall x(P(x) \to \neg R(x))$ on tosi. Näiden vaatimusten voidaan ajatella kuvaavan osajoukkorelaatiota. Ensimäisessä tapauksessa P:n tulkinnan tulisi olla R:n tulkinnan osajoukko ja toisessa R:n tulkinnan komplementin osajoukko. Ainoa joukko, joka molemmat vaatimukset täyttää on tyhjä joukko, joka siis on asetettu P:n tulkinnaksi.

4. Olkoon R kaksipaikkainen predikaattisymboli, jonka tulkintana on relaatio $R^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$ (joukko A on struktuurin $\mathcal{A}$ universumi). Alla on taulukko lauseista, jotka määrittelevät relaatiolle $R^{\mathcal{A}}$ erilaisia ominaisuuksia.

Ominaisuus	Määritelmä
refleksiivisyys	$\forall x R(x, x)$
irrefleksiivisyys	$\forall x \neg R(x, x)$
symmetrisyys	$\forall x \forall y(R(x, y) \to R(y, x))$
asymmetrisyys	$\forall x \forall y(R(x, y) \to \neg R(y, x))$
transitiivisyys	$\forall x \forall y \forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \to R(x, z))$
sarjallisuus	$\forall x \exists y R(x, y)$

Olkoon universumi A kaikkien ihmisten joukko. Anna esimerkkejä relaatioista $R^{\mathcal{A}}$, ($\emptyset \subset R^{\mathcal{A}} \subset A^2$), joilla on yllä määriteltyjä ominaisuuksia.

Allaolevat kolme graafia pyrkivät selventämään eri relaatioiden ominaisuuksia. Tässä solmut ovat struktuurin alkioita, ja solmuja yhdistää kaari, mikäli $R(x, y)$ on tosi, kun $x \in A, y \in A$. Loogisia rakenteita havainnollistetaan aina silloin tällöin niitä vastaavien graafien avulla.



Refleksiivisyys ($\forall x R(x, x)$) tarkoittaa sitä, että graafin kaikista solmuista on kaari takaisin itseensä, ja irrefleksiivisyys ($\forall x \neg R(x, x)$) vastaavasti sitä, että yhdessäkään solmussa ei ole itseään osoitavaa kaarta. Graafeista ensimmäinen on refleksiivinen, toinen irrefleksiivinen ja kolmas ei ole kumpaakaan.

Symmetrisyys ($\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$) tarkoittaa sitä, että aina mikäli solmusta x on kaari solmuun y, graafissa on myös kaari y:stä x:ään. Asymmetrisellä ($\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$) graafilla ei ole yhtään paluukaarta. Kuvan graafeista 1. on symmetrinen, 2. asymmetrinen ja 3. ei kumpaakaan.

Transitiivisessa graafissa ($\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$) pätee, että mikäli solmusta x päästään kaaria seuraamalla (mahdollisesti muiden solmujen kautta) solmuun y, pääsee solmusta x myös suoraan solmuun y. Kuvan graafeista ainoastaan keskimmäinen on transitiivinen.

Graafin sarjallisuus ($\forall x \exists y R(x, y)$) tarkoittaa sitä, että kaikista solmuista lähtee ainakin yksi kaari. Kuvan graafeista ensimmäinen ja viimeinen ovat sarjallisia.

Ominaisuuksien ihmisten joukossa tapahtuvaa tarkastelua varten määritellään seuraavat relaatiot: $T(x, y)$ (x tuntee y:n), $N(x, y)$ (x on naimisissa y:n kanssa), $V(x, y)$ (y on x:n vanhempi) ja $E(x, y)$ (y on x:n esi-isä). Nämä relaatiot toteuttavat ominaisuuksia seuraavan taulukon mukaisesti.

Relaatio	refl.	irrefl.	symm.	asymm.	trans.	sarj.
tuttu	*		*			*
aviopuoliso		*	*			
vanhempi		*		*		*
esi-isä		*		*	*	*

Koska ihminen tuntee itsensä, ja tutut tuntevat toisensa, on $T(x, y)$ refleksiivinen, symmetrinen ja sarjallinen. Aviopuolisot ovat naimisissa toistensa kanssa, eikä kukaan voi olla naimisissa itsensä kanssa, joten $N(x, y)$ on irrefleksiivinen ja symmetrinen. Vanhemmuus on irrefleksiivinen, asymmetrinen (kukaan ei voi olla oma isovanhempansa) ja sarjallinen (kaikilla on vanhemmat). Esi-isä –relaatio on kuten vanhemmuus, mutta sen lisäksi myös transitiivinen, koska jos Kalle on Pekan esi-isä, ja Pekka Juhan, niin Kalle on myös Juhan esi-isä.

5. Tutki semanttisella taululla:

a) $\{\forall x \exists y (P(x) \to Q(y)), \forall x P(x)\} \models \forall x Q(x)$.

b) $\{\forall x \forall y (\exists z (R(x, z) \land R(z, y)) \to R(x, y)), R(a, b), R(b, a)\} \models R(a, a)$.

c) $\models \forall x \exists y R(x, y) \to (\forall y (\neg S(y) \to \neg \exists x R(x, y)) \to \exists x S(x))$.

Ratk.

a)

1. $T(\forall x \exists y (P(x) \to Q(y)))$

2. $T(\forall x P(x))$

3. $E(\forall x Q(x))$

4. $E(Q(c))$ 3. x/c

5. $T(P(c))$ 2. x/c

6. $T(\exists y (P(c) \to Q(y)))$ 1. x/c

7. $T(P(c) \to Q(d))$ 6. y/d

8. $E(P(c))$ 7. $\otimes$ | 8. $T(Q(d))$ 7.

9. $T(P(d))$ 2. x/d

Taulu näyttää jäävän auki. Tätä voidaan perustella sillä, että aina kun predikaatti Q tulee instantioida, pitää se tehdä uudella vakiolla. Ristiriita edellyttäisi samaa vakiota totena ja epätotena. Avoimesta haarasta voidaan lukea vastaesimerkki, $\mathcal{A} = \{1, 2\}, c^{\mathcal{A}} = 1,\ d^{\mathcal{A}} = 2,\ P^{\mathcal{A}} = \{1, 2\},\ Q^{\mathcal{A}} = \{2\}$.

b)

$$1.\ T(\forall x \forall y(\exists z(R(x,z) \land R(z,y)) \to R(x,y)))$$

$$2.\ T(R(a,b))$$

$$3.\ T(R(b,a))$$

$$4.\ E(R(a,a))$$

$$5.\ T(\exists z(R(a,z) \land R(z,a)) \to R(a,a)),\ 1.\ x/a, y/a$$

$$6.\ T(R(a,b) \land R(b,a) \to R(a,a)),\ 5.\ z/b$$

$$7.\ E(R(a,b) \land R(b,a)),\ 6. \qquad 7.\ T(R(a,a)),\ 6.\ \otimes$$

$$8.\ E(R(a,b)),\ 7.\ \otimes \qquad 8.\ E(R(b,a)),\ 7.\ \otimes$$

Kaikki haarat ristiriitaisia, esitetty väite pätee.

6. Tiedetään, että

(i) kaikki syylliset ovat valehtelijoita,

(ii) ainakin yksi syytetyistä on myös todistaja ja

(iii) yksikään todistaja ei valehtele.

Todista, etteivät kaikki syytetyt ole syyllisiä. Käytä semanttista taulua.

Olkoon predikaatit $G(x)$ (x on syyllinen), $L(x)$ (x on valehtelija), $A(x)$ (x on syytetty) ja $W(x)$ (x on todistaja). Premissit ovat nyt $\forall x(G(x) \to L(x))$, $\exists x(A(x) \land W(x))$ ja $\forall x(W(x) \to \neg L(x))$. Haluttu johtopäätös on $\neg\forall x(A(x) \to G(x))$. Taulutodistus on seuraavanalainen.

$$
\begin{array}{l}
T(\forall x(G(x) \to L(x))) \\
T(\exists x(A(x) \land W(x))) \\
T(\forall x(W(x) \to \neg L(x))) \\
F(\neg \forall x(A(x) \to G(x)))
\end{array}
$$

$$T(\forall x(A(x) \to G(x)))$$

$$T(A(a) \land W(a))$$

$$
\begin{array}{c}
T(A(a)) \\
T(W(a))
\end{array}
$$

$$T(A(a) \to G(a))$$

$$
\begin{array}{cc}
F(A(a)) & T(G(a)) \\
\otimes &
\end{array}
$$

$$T(W(a) \to \neg L(a))$$

$$
\begin{array}{cc}
F(W(a)) & T(\neg L(a)) \\
\otimes &
\end{array}
$$

$$F(L(a))$$

$$T(G(a) \to L(a))$$

$$
\begin{array}{cc}
F(G(a)) & T(L(a)) \\
\otimes & \otimes
\end{array}
$$

T-79.144 **Syksy 2001**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 9 (opetusmoniste, kappaleet 3.1 - 5.4)
13 – 16.11.2001

1. Tiedetään, että

1) jos tiili on toisen tiilen päällä, se ei ole pöydällä

2) jokainen tiili on pöydällä tai toisen tiilen päällä ja

3) yksikään tiili ei ole sellaisen tiilen päällä, joka edelleen on jonkun tiilen päällä.

Todista semanttisella taululla, että jos tiili on toisen tiilen päällä, niin jälkimmäisen on oltava pöydällä.

Ratk.
Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= \text{“tiili } x \text{ on tiilen } y \text{ päällä” ja} \\ P(x) &= \text{“tiili } x \text{ on pöydällä”.} \end{aligned}$$

Premissijoukko on formalisoituna seuraavanlainen:

$$\{\forall x\,(\exists y\,T(x,y) \to \neg P(x)),\ \forall x\,(P(x) \lor \exists y\,T(x,y)),$$
$$\forall x \forall y\,(\exists z\,T(y,z) \to \neg T(x,y))\}$$

Haluttu johtopäätös on

$$\forall x \forall y\,(T(x,y) \to P(y))$$

Taulutodistus:

$$1.\ T(\forall x(\exists y T(x,y) \to \neg P(x)))$$

$$2.\ T(\forall x(P(x) \vee \exists y T(x,y)))$$

$$3.\ T(\forall x \forall y(\exists z T(y,z) \to \neg T(x,y)))$$

$$4.\ E(\forall x \forall y(T(x,y) \to P(y)))$$

$$5.\ E(\forall y(T(c,y) \to P(y))),\ 4.\ x/c$$

$$6.\ E(T(c,d) \to P(d)),\ 5.\ y/d$$

$$7.\ T(c,d),\ 6.$$

$$8.\ E(d),\ 6.$$

$$9.\ T(P(d) \vee \exists y T(d,y))$$

$10.\ T(P(d)),\ 9.$	$10.\ T(\exists y T(d,y)),\ 9.$
$\otimes$	$11.\ T(d,e),\ 10.\ y/d$
	$12.\ T(\exists z T(d,z) \to \neg T(c,d)),\ 3.\ x/c, y/d$

$13.\ E(\exists z T(d,z)),\ 12.$	$13.\ T(\neg T(c,d)),\ 12.$
$14.\ E(T(d,e)),\ 13.\ z/e$	$14.\ E(T(c,d)),\ 13.$
$\otimes$	$\otimes$

2. *Suunnattu* graafi koostuu joukosta solmuja ja solmujen välisistä *suunnatuista* kaarista. Oletetaan, että solmut on esitetty vakiosymbolien $\{a, b, \dots\}$ avulla ja kaaret kaksipaikkaisen predikaatin $K(x,y) =$ “solmusta x on kaari solmuun y“ avulla.

1. Määrittele predikaatit $R_n(x,y) =$ “solmusta x on kaarien suuntainen reitti solmuun y siten, että reitillä on n kappaletta kaaria”, kun n saa arvot $0, 1, 2, \dots, k$. Kuvaa allaoleva graafi käyttäen predikaattia K.

$$a \;\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}}\; b \longrightarrow c$$

2. Osoita semanttisella taululla, että laatimastasi kuvauksesta sekä predikaattien R_2 ja R_3 määritelmistä seuraa loogisesti

$$\exists x(R_2(x,x) \wedge R_3(x,c)).$$

Ratk.

a) Määritellään predikaatit $R_n(x, y)$ seuraavasti:

$$\begin{gathered}
\forall x R_0(x, x) \\
\forall x \forall y \forall z (R_0(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_1(x, z)) \\
\forall x \forall y \forall z (R_1(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_2(x, z)) \\
\vdots \\
\forall x \forall y \forall z (R_{k-1}(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_k(x, z))
\end{gathered}$$

Säännöt siis tarkoittavat, että kaikista solmuista on nollan askeleen mittainen reitti itseensä, ja mikäli solmusta x on $k-1$:n askeleen mittainen reitti solmuun y ja solmusta y on kaari solmuun z, voidaan kyseinen kaari liittää reitin jatkoksi ja saada k:n askeleen reitti solmusta x solmuun z.

Graafi:

$$a \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} b \longrightarrow c$$

voidaan esittää kaarirelaation avulla seuraavasti:

$$\begin{gathered}
K(a, b) \\
K(b, a) \\
K(b, c)
\end{gathered}$$

b) Ennen taulutodistuksen laadintaa kannattaa miettiä, mitä kysely tarkoittaa, ja tekemällä todistuksen sen pohjalta. Kyselyssä väitetään, että on olemassa solmu, josta lähtee kahden askeleen mittainen silmukka takaisin itseensä, ja josta pääsee kolmella askeleella solmuun c. Tarkastelemalla graafia huomataan, että solmu b täyttää tämän ehdon. Todistus etenee siten seuraavasti:

1. Todistetaan, että solmusta b on yhden askeleen pituinen reitti solmuun a.
2. Todistetaan, että solmusta b on kahden askeleen pituinen reitti takaisin itseensä.
3. Todistetaan, että solmusta b on kolmen askeleen pituinen reitti solmuun c.

Mikäli tätä strategiaa ei noudata, todistuksesta voi tulla huomattavan hankala.

$$1.\ T(\forall x R_0(x,x))$$

$$2.\ T(\forall x \forall y \forall z(R_0(x,y) \wedge K(y,z) \rightarrow R_1(x,z)))$$

$$3.\ T(\forall x \forall y \forall z(R_1(x,y) \wedge K(y,z) \rightarrow R_2(x,z)))$$

$$4.\ T(\forall x \forall y \forall z(R_2(x,y) \wedge K(y,z) \rightarrow R_3(x,z)))$$

$$5.\ T(K(a,b))$$

$$6.\ T(K(b,a))$$

$$7.\ T(K(b,c))$$

$$8.\ E(\exists x(R_2(x,x) \wedge R_3(x,c)))$$

$$9.\ E(R_2(b,b) \wedge R_3(b,c)),\ 8.\ x/b$$

$$10.\ T(R_0(b,b) \wedge K(b,a) \rightarrow R_1(b,a)),\ 2.\ x/a, y/a, z/b$$

$$11.\ E(R_0(b,b) \wedge K(b,a)),\ 10. \qquad 11.\ T(R_1(b,a)),\ 10.$$

$$12.\ E(R_0(b,b)),\ 11. \qquad 12.\ E(K(b,a)),\ 11.$$

$$\otimes \qquad \otimes$$

Tarkastellaan asemointisyistä alipuuta solmusta 11 erikseen.

$$11.\ T(R_1(b,a))$$

$$12.\ T(R_1(b,a) \wedge K(a,b) \rightarrow R_2(b,b)), 3. x/b, y/a, z/b$$

$$13.\ E(R_1(b,a) \wedge K(a,b)), 12. \qquad 13.\ T(R_2(b,b)), 12.$$

$$12.\ E(R_1(b,a)), 13. \qquad 12.\ E(K(a,b)), 13. \qquad 14.\ T(R_2(b,b) \wedge K(b,c) \rightarrow R_3(b,c)), 3.\ x/a, y/b, z/c$$

$$\otimes \qquad \otimes$$

$$15.\ E(R_2(b,b) \wedge K(b,c)),\ 14. \qquad 15.\ T(R_3(b,c)),\ 14.$$

$$16.\ E(R_2(b,b)),\ 15. \qquad 16.\ E(K(b,c)),\ 15.$$

$$\otimes \qquad \otimes$$

Tarkastellaan lopuksi solmun 15 alipuuta.

$$T(R_3(b,c))$$

$$E(R_2(b,b)),\ 9. \qquad E(R_3(b,c)),\ 9.$$

$$\otimes \qquad \otimes$$

Koko taulu saatiin ristiriitaikseksi ja looginen seuraavuus täten osoitettua.

3. Tutki semanttisella taululla:

a) $\{\forall x \exists y (P(x) \to Q(y)), \forall x P(x)\} \models \forall x Q(x)$.

b) $\{\forall x \forall y (\exists z (R(x,z) \wedge R(z,y)) \to R(x,y)), R(a,b), R(b,a)\} \models R(a,a)$.

c) $\{\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x)), R(a,b)\} \models R(a,a)$

d) $\models \forall x \exists y R(x,y) \to (\forall y (\neg S(y) \to \neg \exists x R(x,y)) \to \exists x S(x))$.

Ratk.
Tehtävä on muutoin sama kuin laskuharjoitus 8:ssa, mutta c-kohta on lisätty.

c) Tarkastelussa kannattaa jälleen miettiä, mitä lausejoukon lauseet tarkoittavat. Kvantifioitu lause näyttäisi määrittelevän symmetriaskeeman ja vakioitu lause antavan yhden relaation R instanssin. Kysely ei kuitenkaan ole annetulle instanssille symmetrinen (vrt. tehtävä, jos olisi $R(b,a)$), joten taulu jäänee auki.

1. $T(\forall x \forall y (R(x,y) \to R(y,x)))$

2. $T(R(a,b))$

3. $E(R(a,a))$

4. $T(R(a,b) \to R(b,a))$, 1. x/a, y/b

5. $E(R(a,b))$ $\otimes$ 	5. $T(R(b,a))$

6. $T(R(a,a) \to R(a,a))$, 1. x/a, y/a

7. $E(R(a,a))$, 6. 	7. $T(R(a,a))$, 6. $\otimes$

8. $T(R(b,a) \to R(a,b))$, 1. x/b, y/a

9. $E(R(b,a))$, 8. $\otimes$ 	9. $T(R(a,b))$, 8.

10. $T(R(b,b) \to R(b,b))$, 1. x/b, y/b

11. $E(R(b,b))$, 10. 	11. $T(R(b,b))$, 10.

Taulu tuli valmiiksi, universaalisti kvantifioitu lause on instantioitu kaikilla vakioiden a, b kombinaatioilla, mutta ristiriitaa ei saatu johdettua. Itse asiassa vastaesimerkkejä on 2. Tarkastellaan oikeanpuolimmaista avointa haaraa, joka päättyy solmuun $T(R(b,b))$. Haaralle saadaan struktuuri $\mathcal{A} = \{1,2\}, a^{\mathcal{A}} = 1, b^{\mathcal{A}} = 2, R^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$, joka asettaa premissit todeksi, mutta oletetun seurauksen epätodeksi.

4. Muunna seuraavat lauseet konjunktiiviseen normaalimuotoon ja suorita skolemointi.

a) $\forall y(\exists x P(x,y) \to Q(y,z)) \land \exists y(\forall x R(x,y) \lor Q(x,y))$.

b) $\exists x R(x,y) \leftrightarrow \forall y P(x,y)$.

c) $\forall x \exists y Q(x,y) \lor \exists x \forall y P(x,y) \land \neg \exists x \exists y P(x,y)$.

d) $\neg(\forall x \exists y P(x,y) \to \exists x \exists y R(x,y)) \land \forall x \neg \exists y Q(x,y)$.

Ratk.
Muunnettaessa predikaattilogiikan lauseita normaalimuotoihin, tuli noudattaa seuraavaa algoritmia:

- Poistetaan konnektiivit $\to$ ja $\leftrightarrow$.
- Negaatiot sisään kvanttorit ulos.
- Distribuutiosäännöillä haluttu lopullinen muoto (KNM tai DNM).

a)

$$\begin{aligned}
&\forall y(\exists x P(x,y) \to Q(y,z)) \land \exists y(\forall x R(x,y) \lor Q(x,y)) \\
\equiv&\forall y(\neg \exists x P(x,y) \lor Q(y,z)) \land \exists y(\forall x R(x,y) \lor Q(x,y)) \\
\equiv&\forall y(\forall x \neg P(x,y) \lor Q(y,z)) \land \exists y(\forall x R(x,y) \lor Q(x,y)) \\
\equiv&\exists y_1(\forall y(\forall x \neg P(x,y) \lor Q(y,z)) \land (\forall x R(x,y_1) \lor Q(x,y_1))) \\
\equiv&\exists y_1 \forall y_2((\forall x \neg P(x,y_2) \lor Q(y_2,z)) \land (\forall x R(x,y_1) \lor Q(x,y_1))) \\
\equiv&\exists y_1 \forall y_2 \forall x_1 \forall x_2((\neg P(x_1,y_2) \lor Q(y_2,z)) \land (R(x_2,y_1) \lor Q(x,y_1)))
\end{aligned}$$

Nyt havaitaan, että kvanttoreita sisältämätön osa on KNM:n edellyttämää muotoa. Skolemoinnissa uloimmat eksistenssikvanttorit korvataan vakioilla, ja universaalikvanttoreiden sisällä olevat Skolem-funktioilla. Tässä saadaan seuraava lause:

$$\forall y_2 \forall x_1 \forall x_2((\neg P(x_1,y_2) \lor Q(y_2,z)) \land (R(x_2,c) \lor Q(x,c)))$$

c)

$$
\begin{aligned}
&\forall x \exists y Q(x,y) \vee \exists x \forall y P(x,y) \wedge \neg \exists x \exists y P(x,y)) \\
\equiv &\forall x \exists y Q(x,y) \vee \exists x \forall y P(x,y) \wedge \forall x \forall y \neg P(x,y) \\
\equiv &\exists x_1 \forall x_2 (\exists y Q(x_2,y) \vee \forall y P(x_1,y) \wedge \forall x \forall y \neg P(x_1,y)) \\
\equiv &\exists x_1 \forall x_2 \exists y_1 (Q(x_2,y_1) \vee \forall y P(x_1,y) \wedge \forall x \forall y \neg P(x_1,y)) \\
\equiv &\exists x_1 \forall x_2 \exists y_1 \forall y_2 \forall y_3 (Q(x_2,y_1) \vee (P(x_1,y_2) \wedge \neg P(x_1,y_3)))
\end{aligned}
$$

Lause on nyt nk. Prenex-normaalimuodossa, josta voidaan jatkaa konjunktiiviviseen normaalimuotoon.

$$\exists x_1 \forall x_2 \exists y_1 \forall y_2 \forall y_3 ((Q(x_2,y_1) \vee P(x_1,y_2)) \wedge (Q(x_2,y_1) \vee \neg P(x_1,y_3)))$$

Skolemoinnissa x_1 korvataan vakiolla ja y_1 lausutaan x_2:n funktiona.

$$\forall x_2 \forall y_2 \forall y_3 ((Q(x_2,f(x_2)) \vee P(c,y_2)) \wedge (Q(x_2,f(x_2)) \vee \neg P(x_1,y_3)))$$

5. Muunna seuraavat lauseet klausuulimuotoon:

a) $\neg \exists x((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$,
b) $\forall y \exists x P(x,y)$,
c) $\neg \forall y \exists x G(x,y)$ ja
d) $\exists x \forall y \exists z (P(x,z) \vee P(z,y) \to G(x,y))$.

Ratk.

a) Lause $\neg \exists x((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$:
Eliminoidaan implikaatiot: $\neg \exists x((\neg P(x) \vee P(a)) \wedge (\neg P(x) \vee P(b)))$
Viedään $\neg$ kvanttorin $\exists x$ sisään:
$\forall x \neg((\neg P(x) \vee P(a)) \wedge (\neg P(x) \vee P(b)))$
Viedään negaatiot lausekkeiden sisään:
$\forall x((P(x) \wedge \neg P(a)) \vee (P(x) \wedge \neg P(b)))$
Tuodaan $P(x)$ ulos: $\forall x(P(x) \wedge (\neg P(a) \vee \neg P(b)))$
Jätetään universaalikavanttorit pois: $P(x) \wedge (\neg P(a) \vee \neg P(b))$
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{P(x)\},\ \{\neg P(a), \neg P(b)\}\}$

b) Lause $\forall y \exists x P(x, y)$:
Skolemointi: $\forall y P(f(y), y)$
Jätetään universaalikavanttorit pois: $P(f(y), y)$
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{P(f(y), y)\}\}$

c) Lause $\neg \forall y \exists x G(x, y)$:
Viedään $\neg$ kvanttorin $\forall y$ sisään: $\exists y \neg \exists x G(x, y)$
Viedään $\neg$ kvanttorin $\exists x$ sisään: $\exists y \forall x \neg G(x, y)$
Skolemointi: $\forall x \neg G(x, c)$
Jätetään universaalikavanttorit pois: $\neg G(x, c)$
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{\neg G(x, c)\}\}$

d) Lause $\exists x \forall y \exists z (P(x, z) \vee P(z, y) \rightarrow G(x, y))$:
Eliminoidaan implikaatio: $\exists x \forall y \exists z (\neg (P(x, z) \vee P(z, y)) \vee G(x, y))$
Viedään negaatiot lausekkeen sisään:
$\exists x \forall y \exists z ((\neg P(x, z) \wedge \neg P(z, y)) \vee G(x, y))$
Viedään $G(x, y)$ lausekkeen sisään:
$\exists x \forall y \exists z ((\neg P(x, z) \vee G(x, y)) \wedge (\neg P(z, y) \vee G(x, y)))$
Skolemointi: $\forall y \exists z ((\neg P(c, z) \vee G(c, y)) \wedge (\neg P(z, y) \vee G(c, y)))$
Skolemointi: $\forall y ((\neg P(c, f(y)) \vee G(c, y)) \wedge (\neg P(f(y), y) \vee G(c, y)))$
Jätetään universaalikvanttorit pois:
$(\neg P(c, f(y)) \vee G(c, y)) \wedge (\neg P(f(y), y) \vee G(c, y))$
Muodostetaan klausuuliesitys:
$\{\{\neg P(c, f(y)),\ G(c, y)\},\ \{\neg P(f(y), y),\ G(c, y)\}\}$

6. Johda muista kvanttorisäännöistä säännöt, joilla kvanttorit $\forall x$ ja $\exists x$ tuoda allaolevista lausemuodoista ulos, s.e. sulkujen sisälle jäävä alikaava säilyy muodoltaan implikaationa.

a) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\forall x \phi(x) \rightarrow \psi)$
b) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\exists x \phi(x) \rightarrow \psi)$
c) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\phi \rightarrow \forall x \psi(x))$
d) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\phi \rightarrow \exists x \psi(x))$

Ratk.
Tehtävässä sovelletaan jo aikaisemmin tutuksi käyneitä normaalimuotosääntöjä.

a)

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Q}\vec{y}\ (\forall x \phi(x) \to \psi) \\
\equiv &\mathcal{Q}\vec{y}\ (\neg \forall x \phi(x) \lor \psi) \\
\equiv &\mathcal{Q}\vec{y}\ (\exists x \neg \phi(x) \lor \psi) \\
\equiv &\mathcal{Q}\vec{y}\ \exists x_1 (\neg \phi(x_1) \lor \psi) \\
\equiv &\mathcal{Q}\vec{y}\ \exists x_1 (\phi(x_1) \to \psi)
\end{aligned}
$$

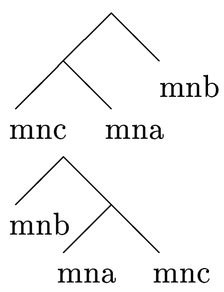
c)

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Q}\vec{y}\ (\phi \to \forall x \psi(x)) \\
\equiv &\mathcal{Q}\vec{y}\ (\neg \phi \lor \forall x \psi(x)) \\
\equiv &\mathcal{Q}\vec{y}\ \forall x_1 (\neg \phi \lor \psi(x_1)) \\
\equiv &\mathcal{Q}\vec{y}\ \forall x_1 (\neg \phi \to \psi(x_1))
\end{aligned}
$$

Säännönmukaisuutena voidaan havaita, että mikäli kvantifiointi on implikaation vasemmalla puolella, muuttuu kvanttori. Oikealla puolella se säilyy.

T-79.144 **Syksy 2001**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 10 (opetusmoniste, kappaleet 6 – 7)
20 – 23.11.2001

1. Esitetään binääripuut kaksipaikkaisen funktiosymbolin s (sisäsolmut) ja yksipaikkaisen funktiosymbolin l (lehtisolmut) avulla. Näin oheisen kuvan ylempi puu saa termiesityksen $s(s(l(c), l(a)), l(b))$.



a) Tarkoittakoon predikaatti $\mathrm{PK}(x, y)$, että binääripuu x on binääripuun y peilikuva. Määrittele predikaatti PK predikaattilogiikan lausein siten, että pystyt päättelemään, ovatko mitkä tahansa kaksi yllä annetun esitystavan mukaista binääripuuta toistensa peilikuvia.

b) Osoita semanttisella taululla, että ylempi binääripuu on alemman binääripuun peilikuva.

Ratk.
Määritellään predikaatti PK seuraavasti:

$$\forall x PK(l(x), l(x))$$
$$\forall x \forall y \forall v \forall w (PK(x, v) \wedge PK(y, w) \rightarrow PK(s(x, y), s(w, v)))$$

Siis:

- lehtisolmut ovat itsensä peilikuvia
- sisäsolmut $s(x, y)$ käsitellään siten, että ensin muodostetaan alipuiden x ja y peilikuvat ja sitten nämä liitetään yhteen käänteiseen järjestykseen $s(w, v)$.

Todistetaan näillä lauseilla, että:

$$PK(s(s(l(c), l(a)), l(b)), s(l(b), s(l(a), l(c))))$$

$$T(\forall x PK(l(x), l(x)))$$
$$T(\forall x \forall y \forall v \forall w (PK(x, v) \wedge PK(y, w) \rightarrow PK(s(x, y), s(w, v))))$$
$$E(PK(s(s(l(c), l(a)), l(b)), s(l(b), s(l(a), l(c)))))$$
$$T(PK(l(a), l(a)))$$
$$T(PK(l(b), l(b)))$$
$$T(PK(l(c), l(c)))$$
$$T(PK(l(a), l(a)) \wedge PK(l(c), l(c)) \rightarrow PK(s(l(a), l(c)), s(l(c), l(a))))$$
$$E(PK(l(a), l(a)) \wedge PL(l(c), l(c))) \qquad T(PK(s(l(a), l(c)), s(l(c), l(a))))$$
$$E(PK(l(a), l(a))) \qquad E(PK(l(c), l(c)))$$
$$\otimes \qquad \otimes$$

Tarkastellaan oikeaa haaraa erikseen:

$$T(PK(s(l(a), l(c)), s(l(c), l(a))))$$
$$T(PK(s(l(c), l(a)), s(l(a), l(c))) \wedge PK(l(b), l(b)) \rightarrow PK(s(s(l(c), l(a)), l(b)), s(l(b), s(l(c), l(a)))))$$
$$E(PK(s(l(c), l(a)), s(l(a), l(c))) \wedge PK(l(b), l(b))) \qquad T(PK(s(s(l(c), l(a)), l(b)), s(l(b), s(l(c), l(a)))))$$
$$\otimes$$
$$F(PK(s(l(c), l(a)), s(l(a), l(c)))) \qquad F(PK(l(b), l(b)))$$
$$\otimes \qquad \otimes$$

Puusta tuli ristiriitainen, joten esitetty lause on PK:n määritelmän looginen seuraus.

2. Kvanttorilla $\exists!x$ tarkoitetaan, että "on olemassa vain yksi x". Väittämä $\exists!x\, \phi(x)$ voidaan ilmaista predikaattilogiikan lauseella

$$(\exists x \phi(x)) \wedge (\forall x \forall y (\phi(x) \wedge \phi(y) \rightarrow x = y)).$$

Formalisoi seuraavat lauseet predikaattilogiikalla:

1.	On vain yksi kuuraparta.
2.	Kaikki joulupukit ovat kuurapartoja.
3.	Kaikki kuuraparrat ovat joulupukkeja.
4.	On vain yksi joulupukki.

Osoita semanttisella taululla, että lause 4 on lauseiden 1-3 looginen seuraus.

Ratk.
Tarkoittakoon predikaatti $K(x)$, että x on kuuraparta ja predikaatti $J(x)$, että x on joulupukki. Näistä lähtökohdista lauseet voidaan formalisoida seuraavasti:

- $\exists x K(x) \wedge \forall x \forall y (K(x) \wedge K(y) \rightarrow x = y)$
- $\forall x (J(x) \rightarrow K(x))$
- $\forall x (K(x) \rightarrow J(x))$

Kysely on luonnollisesti muotoa:

$$\exists x J(x) \wedge \forall x \forall y (J(x) \wedge J(y) \rightarrow x = y)$$

Todistus semanttisella taululla on seuraava:

$$1.\ T(\exists x K(x) \wedge \forall x \forall y (K(x) \wedge K(y) \to x = y))$$
$$2.\ T(\forall x (J(x) \to K(x)))$$
$$3.\ T(\forall x (K(x) \to J(x)))$$
$$4.\ E(\exists x J(x) \wedge \forall x \forall y (J(x) \wedge J(y) \to x = y))$$
$$5.\ T(\exists x K(x)),\ 1.$$
$$6.\ T(\forall x \forall y (K(x) \wedge K(y) \to x = y))$$

$$7.\ E(\exists x J(x)) \qquad 7.\ E(\forall x \forall y (J(x) \wedge J(y) \to x = y))$$
$$8.\ T(K(a)),\ 5.\ x/a \qquad 8.\ E(\forall y (J(b) \wedge J(y) \to b = y)),\ 7.\ x/b$$
$$9.\ E(J(a)),\ 7.\ x/a \qquad 9.\ E(J(b) \wedge J(c) \to b = c),\ 8.\ y/c$$
$$10.\ T(K(a) \to J(a)), 3. \qquad 10.\ T(J(b) \wedge J(c))$$
$$11.\ E(K(a))\ \otimes \qquad 11.\ T(J(a))\ \otimes \qquad 11.\ E(b = c)$$
$$12.\ T(J(b))$$
$$13.\ T(J(c))$$
$$14.\ T(K(b) \wedge K(c) \to b = c),\ 6.\ x/b, y/c$$
$$15.\ E(K(b) \wedge K(c)) \qquad 15.\ T(b = c)\ \otimes$$
$$16.\ E(K(b)) \qquad 16.\ E(K(c)$$
$$17.\ T(J(b) \to K(b)), 2.\ x/b \qquad 17.\ T(J(c) \to K(c)), 3.\ x/c$$
$$18.\ E(J(b))\ \otimes \qquad 18.\ T(K(b))\ \otimes \qquad 18.\ E(J(c))\ \otimes \qquad 18.\ T(K(c))\ \otimes$$

3. Luonnolliset luvut $0, 1, 2, \ldots$ esitetään muuttujattomina termeinä 0, $s(0)$, $s(s(0))$, $\ldots$, jotka rakentuvat vakiosymbolista 0 ja funktiosymbolista s, joka tulkitaan funktioksi $s(x) = x + 1$ luonnollisille luvuille x.

a) Määrittele predikaattilogiikan lausein predikaatit $O(x)$ = “x on pariton”, $E(x)$ = “x on parillinen” ja $G(x, y)$ = “x on suurempi kuin y” kaikille luonnollisille luvuille x ja y.

b) Osoita semanttisella taululla, että on olemassa parillinen luonnollinen luku, joka on suurempi kuin jokin pariton luonnollinen luku.

4. Määritä klausuulijoukkojen

a) $\{\{\neg G(x,c)\}\}$,

b) $\{\{P(f(y),y)\}\}$,

c) $\{\{P(x)\},\ \{\neg P(a),\ \neg P(b)\}\}$,

d) $\{\{\neg P(x,y),\ \neg P(y,z),\ G(x,z)\}\}$,

e) $\{\{\neg P(x,y)\},\ \{Q(a,x),\ Q(b,f(y))\}\}$ ja

f) $\{\{P(x),\ Q(f(x,y))\}\}$

Herbrand-universumit ja kannat.

Ratk.
Herbrand-universumi U muodostuu termeistä, jotka ovat konstruoitavissa klausuulijoukossa esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista. Jos klausuulijoukossa ei ole vakiosymboleita, universumiin otetaan jokin vakiosymboli, esimerkiksi a (näin tapahtuu kohdissa (b), (d) ja (f)). Herbrand-kanta B puolestaan muodostuu atomisista lauseista, jotka ovat konstruoitavissa klausuulijoukossa esiintyvistä predikaattisymboleista käyttämällä argumentteina Herbrand-universumin U termejä.

a) $U = \{c\}$, $B = \{G(c,c)\}$.

b) $U = \{a, f(a), f(f(a)), ...\}$, $B = \{P(e_1,e_2) \,|\, e_1 \in U, e_2 \in U\}$.

c) $U = \{a,b\}$, $B = \{P(a), P(b)\}$.

d) $U = \{a\}$, $B = \{P(a,a), G(a,a)\}$.

e) $U = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), ...\}$,
$B = \{P(e_1,e_2) \,|\, e_1 \in U, e_2 \in U\} \cup \{Q(e_1,e_2) \,|\, e_1 \in U, e_2 \in U\}$.

f) $U = \{a, f(a,a), f(a, f(a,a)), f(f(a,a),a), f(f(a,a), f(a,a)), ...\}$,
$B = \{P(e) \,|\, e \in U\} \cup \{Q(e) \,|\, e \in U\}$.

5. Tarkastellaan kaavajoukkoa

$$\Sigma = \{\forall x P(x,a,x),\ \neg\exists x \exists y \exists z (P(x,y,z) \wedge \neg P(x, f(y), f(z)))\}$$

a) Muunna Σ klausuulijoukoksi S.

b) Anna S:n Herbrand-universumi H sekä Herbrand-kanta B.

c) Esitetään Herbrand-struktuurit Herbrand-kannan osajoukkoina. Hae S:lle osajoukkorelaatioon, $\subseteq$, nähden minimaalinen ja maksimaalinen Herbrand-malli.

6. Muunna ongelma predikaattilogiikan lauseen

$$\exists x \exists y (P(x) \leftrightarrow \neg P(y)) \rightarrow \exists x \exists y (\neg P(x) \wedge P(y))$$

pätevyyden selvittämisestä lauselogiikan toteutuvuusongelmaksi ja ratkaise ongelma lauselogiikan menetelmin.

T-79.144 **Syksy 2001**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 11 (opetusmoniste, kappaleet 7.1 – 9.3)
27 – 30.11.2001

1. Laadi substituutioiden $\{x/y, y/b, z/f(x)\}$ ja $\{x/g(a), y/x, w/c\}$ kompositio.

Ratk.
Substituutioita kompositoitaessa on kaksi asiaa:

- Mikäli tulos olisi muotoa x/x ei korvausta tehdä.
- Jos oikea substituutti korvaa samaa muuttujaa kuin vasen, korvaus suoritetaan vasemmasta.

Näin saadaan:

$$\{y/b, z/f(g(a)), w/c\}$$

2. Mitkä ovat seuraavien literaalijoukkojen yleisimmät unifioijat?

a) $\{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
b) $\{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
c) $\{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
d) $\{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$

Ratk.
Sovelletaan unifikaatioalgoritmia vaiheittain:

a) $\sigma_0 = \epsilon$ (tyhjä substituutio)
$S_0 = \{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
$D(S_0) = \{x, f(y)\}$
$\sigma_1 = \{x/f(y)\}$

$\sigma_0\sigma_1 = \{x/f(y)\}$
$S_1 = \{P(f(y), g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
$D(S_1) = \{y, f(z)\}$
$\sigma_2 = \{y/f(z)\}$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_2 = \{x/f(f(z)), y/f(z)\}$
$S_2 = \{P(f(f(z)), g(f(z)), f(a)), P(f(f(z)), g(f(z)), z)\}$
$D(S_2) = \{f(a), z\}$
$\sigma_3 = \{z/f(a)\}$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \{x/f(f(f(a))), y/f(f(a)), z/f(a)\}$
$S_3 = \{P(f(f(f(a))), g(f(f(a))), f(a))\}$
Unifiointi onnistui, yleisin unifioija on $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

b) $\sigma_0 = \epsilon$
$S_0 = \{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
$D(S_0) = \{x, a, y\}$
$\sigma_1 = \{x/a\}$
$S_1 = \{P(a, f(a), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
$D(S_1) = \{a, y\}$
$\sigma_2 = \{y/a\}$
$S_2 = \{P(a, f(a), g(a)), P(a, f(g(a)), g(a))\}$
$D(S_2) = \{a, g(a)\}$
Termit a ja $g(a)$ eivät unifioidu; unifiointi ei siis onnistu.

c) $\sigma_0 = \epsilon$
$S_0 = \{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
$D(S_0) = \{x, y, b\}$
$\sigma_1 = \{x/b\}$
$S_1 = \{P(b, f(b, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
$D(S_1) = \{b, y\}$
$\sigma_2 = \{y/b\}$
$S_2 = \{P(b, f(b, b)), P(b, f(b, a))\}$
$D(S_2) = \{b, a\}$
Termit b ja a eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

d) $\sigma_0 = \epsilon$
$S_0 = \{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$
$D(S_0) = \{f(a), y, x\}$
$\sigma_1 = \{y/f(a)\}$
$S_1 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(x, f(a), f(z))\}$
$D(S_1) = \{f(a), x\}$
$\sigma_2 = \{x/f(a)\}$
$S_2 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(z))\}$
$D(S_2) = \{z, b, f(z)\}$ (z:aa ei voi korvata $f(z)$:lla)

$\sigma_3 = \{z/b\}$
$S_3 = \{P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(b))\}$
$D(S_3) = \{b, f(b)\}$
Termit b ja $f(b)$ eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

3. Osoita, että

a) substituutioiden kompositio ei ole kommutatiivinen, eli että on olemassa substituutiot σ ja λ s.e. $\sigma\lambda \neq \lambda\sigma$.

b) yleisimmät unifioijat eivät ole yksikäsitteiset, eli että jollekin lausejoukolle S on olemassa kaksi yleisintä unifioijaa, σ ja λ, s.e. $\sigma \neq \lambda$.

Ratk.

a) Olkoon $\sigma = \{x/a\}$ ja $\lambda = \{x/b\}$.

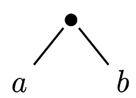
b) Lausejoukolle $S = \{P(x), P(y)\}$ saadaan yleisimmät unifioijat $\{x/y\}$ ja $\{y/x\}$.

4. Unifioi seuraava joukko.

$$\{P(x, y, z), P(f(w, w), f(x, x), f(y, y))\}$$

5. Esitetään binääripuut kaksipaikkaisen funktiosymbolin s (sisäsolmut) ja yksipaikkaisen funktiosymbolin l (lehtisolmut) avulla. Näin oheisen kuvan ylempi puu saa termiesityksen $s(s(l(c), l(a)), l(b))$.

a) Tarkoittakoon predikaatti PK(x, y), että binääripuu x on binääripuun y peilikuva. Määrittele predikaatti PK predikaattilogiikan lausein siten, että pystyt päättelemään, ovatko mitkä tahansa kaksi yllä annetun esitystavan mukaista binääripuuta toistensa peilikuvia.



b) Hae resoluutiolla oheisen binääripuun peilikuva.

6. Todista resoluutiolla, että ei ole olemassa miesparturia, kun:

a) Jokainen parturi ajaa niiden miesten parrat, jotka eivät itse aja partaansa.

b) Kukaan parturi ei aja niiden miesten partoja, jotka ajavat itse partansa.

Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja: $P(x)$ = "x on parturi" ja $A(x,y)$ = "x ajaa y:n parran".

a) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(\neg A(y,y) \rightarrow A(x,y)))$,

b) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(A(y,y) \rightarrow \neg A(x,y)))$.

Muodostetaan klausuulit:

a) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(\neg A(y,y) \rightarrow A(x,y)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(A(y,y) \vee A(x,y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee A(y,y) \vee A(x,y))$
$\neg P(x) \vee A(y,y) \vee A(x,y)$
$\{\neg P(x_1),\ A(y_1,y_1),\ A(x_1,y_1)\}$

b) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(A(y,y) \rightarrow \neg A(x,y)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(\neg A(y,y) \vee \neg A(x,y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee \neg A(y,y) \vee \neg A(x,y))$
$\neg P(x) \vee \neg A(y,y) \vee \neg A(x,y)$
$\{\neg P(x_2),\ \neg A(y_2,y_2),\ \neg A(x_2,y_2)\}$

Halutaan todistaa $\neg \exists x P(x)$ ja siksi muodostetaan lauseen negaatio $\exists x P(x)$. Tämä lause muutetaan klausuulimuotoon $\{P(a)\}$.

Klausuuleista

$$\{\neg P(x_1),\ A(y_1,y_1),\ A(x_1,y_1)\} \quad \text{ja} \quad \{\neg P(x_2),\ \neg A(y_2,y_2),\ \neg A(x_2,y_2)\}$$

saadan

$$\{\neg P(x_3)\} \qquad (\text{substituutio } \{x_1/x_3, x_2/x_3, y_1/x_3, y_2/x_3\})$$

Klausuuleista $\{P(a)\}$ ja $\{\neg P(x_3)\}$ saadaan tyhjä klausuuli (substituutio $\{x_3/a\}$). Täten klausuulijoukko on toteutumaton ja $\neg \exists x P(x)$ seuraa loogisesti premisseistä.

T-79.144 Syksy 2001
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 12 (opetusmoniste, paketti 3, sovellukset)
4 – 7.12.2001

1. Esitetään luonnolliset luvut $0, 1, 2, \ldots$ muuttujattomilla termeillä 0, $s(0)$, $s(s(0))$, …, jotka rakentuvat vakiosymbolista 0 ja funktiosymbolista s, joka tulkitaan funktioksi $s(x) = x + 1$ luonnollisille luvuille x.

a) Tarkoittakoon predikaatit $J2(x)$, $J3(x)$ ja $J6(x)$ sitä, että luonnollinen luku x on jaollinen kahdella, kolmella ja kuudella. Määrittele nämä predikaatit predikaattilogiikan lausein siten, että predikaatin $J6$ määritelmä perustuu predikaattien $J2$ ja $J3$ määritelmiin.

b) Laadi a-kohdan määritelmien perusteella Otterin syötetiedosto ja osoita sen avulla, että jos luonnollinen luku x on kahdella ja kolmella jaollinen, niin luonnollinen luku $x+6$ on kuudella jaollinen.

c) Kirjoita määritelmät PROLOGin sääntöinä ja hae kuudella jaollisia luonnollisia lukuja. Samoin, hae luonnollinen luku x siten, että $x+5$ on kuudella jaollinen.

Ratk.
Todetaan ensin perustapaukset, s.o. että 0 on kahdella ja kolmella jaollinen.

$$J2(0)$$
$$J3(0)$$

Edelleen, kuinka näistä päätellään jaollisuus suuremmille luvuille:

$$\forall x(J2(x) \rightarrow J2(s(s(x))))$$
$$\forall x(J3(x) \rightarrow J2(s(s(s(x)))))$$

Ja lopuksi määritellään kuudella jaollisuus:

$$\forall x(J2(x) \wedge J3(x) \rightarrow J6(x))$$

B - kohdassa pitää ohjelma kääntää Otterille ja esittää tehtävässä mainittu kysely.

```
set(auto).

formula_list(usable).

% tietämys
J2(0).
J3(0).
all x (J2(x) -> J2(s(s(x)))).
all x (J3(x) -> J3(s(s(s(x))))).
all x (J2(x) & J3(x) -> J6(x)).

% kysely
exists x -(J2(x) & J3(x) -> J6(s(s(s(s(s(s(x)))))))).

end_of_list.
```

2. Käytä invariantteja osoittaaksesi, että seuraava C-ohjelma palauttaa annetun taulukon suurimman alkion (ohjelman argumentit, `a` = taulukko ja `size` = taulukon koko, (size > 0)).

```
int max(int a[], int size) {
    int m = a[0];
    while(i < size) {
        if (a[i] > m) m = a[i];
        i = i + 1;
    }
    return m;
}
```

3. Osoita lauselogiikan ja semanttisen taulun avulla oheisten C:n ehtolausekkeiden ekvivalenssi.

a) `!(a < b || b > a)`

b) `a == b`

4. Osoita induktiolla, että oheinen ohjelma palauttaa arvon yksi, jos ja vain jos merkkijono a edeltää aidosti merkkijonoa b leksikografisessa järjestyksessä.

```
int comp(char *a, char *b) {
    if(*a && *b) {
        if(*a < *b) return 1;
        else if(*a > *b) return 0;
        a++; b++;
        return comp(a, b);
    }
    if (*b) return 1;
    return 0;
}
```