T-79.144

Logiikka tietotekniikassa: perusteet (2 ov)

Syksy 2001

Luennot

Ilmoittautuminen: TOPI:lla tai ensimmäisellä luennolla

Tiistaisin, klo 12-14, sali T1 (18.9.2001 ei luentoa)

Luennoitsija: TkT Tomi Janhunen (@hut.fi, 451 3255)

Vastaanotto: luentokaudella tiistaisin klo 15.15-16.00 huone TB335

Luentojen viikottainen sisältö: ilmoitetaan kurssin kotisivulla

Laskuharjoitukset

Viikolta 38 alkaen:

1. ryhmä: tiistai, klo 15-16, sali T2
2. ryhmä: keskiviikko, klo 9-10, sali T2
3. ryhmä: torstai, klo 8-9, sali T3
4. ryhmä: perjantai, klo 9-10, sali T2

Laskuharjoitusassistentit:

DI Toni Jussila (@hut.fi, 451 3258)

FM Misa Keinänen (mkk@tcs.hut.fi)

TY Emilia Oikarinen (@hut.fi)

Tiedottaminen ja yhteydenotot

Kurssin kotisivu: `http://www.tcs.hut.fi/Teaching/T-79.144/`

Ilmoitustaulu: T-talon 3. kerroksessa B-siiven aulan seinällä

Uutisryhmä: `opinnot.tik.logiikka`

Kurssin sähköpostiosoite: `t79144@tcs.hut.fi`

Sähköposti: opiskelijanumeron perusteella (@students.hut.fi)

Kotitehtäväpalvelin: `http://logic.tcs.hut.fi/`

Oppimateriaali

Opetusmonisteet:

- Luentomateriaali toimitetaan kolmessa paketissa.
- Syksyllä 2001 materiaalista toimitetaan yksityiskohtaisempi versio.
- Lisänä on laskuharjoitusten tehtävät ja malliratkaisuja.

Oppikirja (ei välttämätön):

- A. Nerode ja R. A. Shore, *Logic for Applications*, 2nd ed., Springer-Verlag, 1997.
- Kolme ensimmäistä lukua (luennoilla esitetyssä laajuudessa).
- Myös ensimmäistä laitosta voi käyttää.

Kurssin suorittaminen

Kolme pakollista/henkilökohtaista kotitehtävää

- Kotitehtävät tulee suorittaa hyväksytysti ennen tenttiä.
- Aikataulu ilmoitetaan myöhemmin.

ja tentti.

- 1. tentti: tiistai 18. joulukuuta, klo 13-16, salit DE ja T1
- 2. tentti: tiistai 8. tammikuuta, klo 13-16, salit DE
- 3. tentti: toukokuussa
- 4. tentti: elo-syyskuussa
- Tentteihin ilmoittautuminen pakollista ja sitovaa.

Kurssin sisältö

Paketti 1: Lauselogiikka

- syntaksi ja semantiikka
- todistusteoriaa (Hilbertin ja Suppesin järjestelmät)
- semanttiset/analyyttiset taulut
- normaalimuodot
- resoluutiosääntö

Paketti 2: Predikaattilogiikka

- edellisen yleistys, lisänä mm. unifikaatio

Paketti 3: Sovelluksia

- logiikkaohjelmointi ja ohjelmien oikeellisuustarkastelut

JOHDANTO KURSSIN AIHEPIIRIIN

- Näkemyksiä loogiseen päättelyyn
- Logiikan sovelluskohteita tietojenkäsittelyssä
- Keskeisiä esitietoja

1 Näkemyksiä loogiseen päättelyyn

- **Inhimillinen päättely**

  Esim. ihmisen suorittama syiden ja seurausten analysointi.

  Ihmisen päättelykyky on rajallinen ja
  päättelyyn käytettävissä oleva aika usein rajallinen.

- **Formaali päättely**

  Matemaattinen logiikka tarjoaa formaalin mallin päättelylle:

  – väittämät esitetään formaalilla kielellä ja

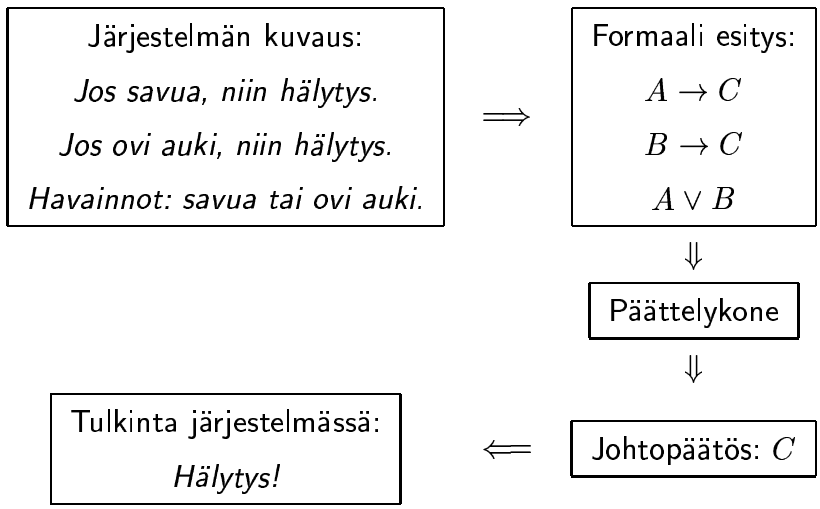
  – johtopäätösten hyväksyttävyydelle annetaan eksaktit kriteerit.

  Malli on ideaalinen (vrt. inhimillinen päättely) ja abstrakti.
  Päättely voidaan palauttaa merkkijonojen käsittelyksi ao. kielessä.

- **Automaattinen/mekaaninen päättely**

  Toteutetaan looginen päättely tietokoneohjelmana (päättelykone).

Esimerkki.



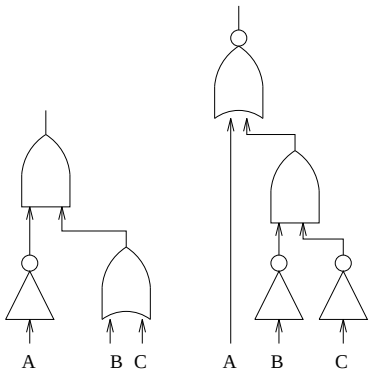
2 Logiikan sovelluskohteita tietojenkäsittelyssä

Voidaan nähdä karkea kahtiajako:

- **Järjestelmän ominaisuuksien määrittely ja analysointi: esim.**
  - Ohjelman ehtolausekkeiden muokkaaminen
  - Ohjelmien vaatimusmäärittelyt ja synteesi
  - Järjestelmien oikeellisuustarkastelut
- **Päättelykomponentti järjestelmän osana: esim.**
  - Ehtolausekkeiden evaluointi
  - Loogisten lausekkeiden tulkitseminen käskyiksi tietokoneelle
  - Sääntöpohjainen päättely (mm. asiantuntijajärjestelmät)

Esimerkki. Kombinatoriset piirit

Laskevatko seuraavat kombinatoriset piirit samat funktiot?



Piirien kuvaukset lauselogiikalla: $\neg A \wedge (B \vee C)$ ja $\neg(A \vee (\neg B \wedge \neg C))$

Esimerkki. Ohjelmien ehtolausekkeet

Olkoon `myptr` tyyppiä "`char *`" C-kielessä.

```
/* TAPA 1 */

if(myptr != NULL && myptr[0] == '/') doit(myptr);
if(!(myptr == NULL || myptr[0] == '.')) dothat(myptr);

/* TAPA 2 */

if(myptr != NULL) {
  if(myptr[0] == '/') doit(myptr);
  if(myptr[0] != '.') dothat(myptr);
}
```


Esimerkki. Ohjelmankehitys

Tiedetään: jos $X_1 < 0$ tai $X_2 < 0$ tai ... tai $X_n < 0$, niin $Z < 0$.

Vertaa:

```
if (Z < 0)
    do_0()
else {
    if (X1 < 0)
        do_1();
    if (X2 < 0)
        do_2();
    ...
    if (Xn < 0)
        do_n();
}
```

```
if (Z < 0)
    do_0();
```

Esimerkki. Ohjelmien oikeellisuutarkastelut

- **Induktio** tietorakenteiden suhteen

```
duplicate([],[]).
duplicate([E|R1],[E|[E|R2]]) :- duplicate(R1,R2).
```

  Voidaan osoittaa *rakenteisella induktiolla*, että proseduuri `duplicate` käsittelee oikein mielivaltaisen pitkiä listoja.

- **Induktio** silmukan suorituskertojen suhteen

```
int loop() { int n = 0; while(n<1000) n++; return n; }
```

  Voidaan osoittaa, että $\mathrm{n} \leq 1000$ on while-silmukan *invariantti* (eli ominaisuus, joka säilyy silmukkaa suoritettaessa).

Esimerkki. Relaatiotietokannat

Predikaattilogiikalla voidaan kuvata relaatiotietokantojen primitiivit:

- Relaatioiden R_1 ja R_2 unioni: $\forall \overline{x}(R_1(\overline{x}) \vee R_2(\overline{x}) \rightarrow P(\overline{x}))$.
- Relaatioiden R_1 ja R_2 leikkaus: $\forall \overline{x}(R_1(\overline{x}) \wedge R_2(\overline{x}) \rightarrow P(\overline{x}))$.
- Relaation R projektio: esim. $\forall x \forall y \forall z(R(x,y,z) \rightarrow P(x,z))$.
- Relaatioiden R_1 ja R_2 luonnollinen yhdiste (alla y:n suhteen):

$$\forall x \forall y \forall z(R_1(x,y) \wedge R_2(y,z) \rightarrow R(x,y,z)).$$

Esimerkki. Deduktiiviset tietokannat

$$\text{linkki}(\text{otaniemi}, \text{tapiola})$$
$$\text{linkki}(\text{otaniemi}, \text{lehtisaari})$$

$$\forall x \forall y (\text{linkki}(x, y) \rightarrow \text{linkki}(y, x))$$
$$\forall x \forall y (\text{linkki}(x, y) \rightarrow \text{yhteys}(x, y))$$
$$\forall x \forall y \forall z (\text{yhteys}(x, y) \wedge \text{yhteys}(y, z) \rightarrow \text{yhteys}(x, z))$$

Kuinka selvitetään vastaus kyselyyn yhteys(tapiola, lehtisaari)?
Entä perinteisellä relaatiotietokannalla (SQL-kysely)?

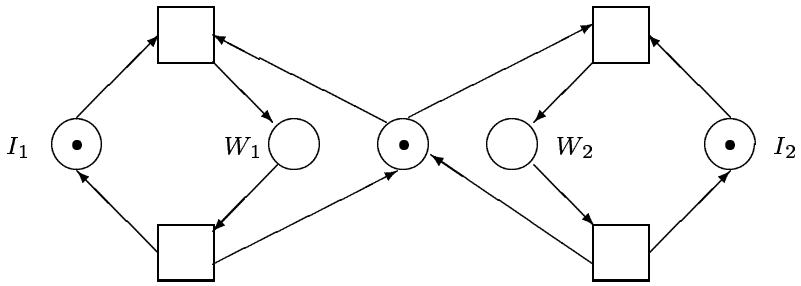
Esimerkki. Logiikkaohjelmointi (PROLOG)

```
append([],L,L).
append([A|T],L,[A|S]) :- append(T,L,S).

?- append([1,2,3],[4,5,6],X).

X = [1,2,3,4,5,6]

?- append([1,X,3],Y,[1,2,3,4]).

X = 2, Y=[4]
```

Vrt. yleinen näkemys: PROGRAM = LOGIC + CONTROL

Esimerkki. Loogiset määrittely- ja kyselykielet

Mallinnetaan *semafori* Petri-verkkojen (automaattien yleistys) avulla.



- I_i tarkoittaa, että prosessi i on toimettomana, ja W_i tarkoittaa, että prosessi i kirjoittaa prosessien yhteiseen muistipaikkaan.
- Voimme todeta, että lause $I_1 \vee I_2$ on aina tosi ja että lause $W_1 \wedge W_2$ on aina epätosi järjestelmän *saavutettavissa* tiloissa.

Esimerkki. Loogisen kielen laajennuksia

Tyypillisiä laajennuksia ovat modaalilogiikat, kuten esim.

- Aikalogiikka

  Tyypillisiä operaattoreita $\Box$ (aina), $\Diamond$ (joskus) ja $\bigcirc$ (seuraavalla ajanhetkellä)

  Turvallisuusominaisuudet: $\Box(P \vee Q)$

  Reiluusominaisuudet: $\Diamond(P \wedge \bigcirc R)$

- Tietämys- ja uskomuslogiikat

  Operaattoreina mm. $\mathbf{K}$ (tietää) ja $\mathbf{B}$ (uskoa).

  Esim. $\mathbf{K}P \rightarrow \mathbf{KK}P$ (itsetutkiskelu)

  $\neg\mathbf{B}P \rightarrow \neg P$ (suljetun maailman oletus)

3 Joitain esitietoja

3.1 Induktioperiaate luonnollisille luvuille

Luonnollisten lukujen joukko määritellään induktiivisesti:

- 0 on luonnollinen luku ja
- jos n on luonnollinen luku, niin myös $n+1$ on luonnollinen luku.

Jos halutaan osoittaa, että kaikilla luonnollisilla luvuilla n on jokin ominaisuus P, sovelletaan seuraavaa periaattetta:

Määritelmä. Induktioperiaate.
Olkoon P jokin luonnollisten lukujen ominaisuus.
Jos $P(0)$ ja $\forall n \in \mathbb{N} : (P(n) \rightarrow P(n+1))$, niin $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$.

Esimerkki. Todistetaan, että kaikille luonnollisille luvuille n pätee

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Perustapaus: $2^0 = 1$ ja $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$.

Induktiohypoteesi: $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

Induktioaskel:
$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n &= (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1}) + 2^n \\ &= (2^n - 1) + 2^n \\ &= 2 \times 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Tuloksen tietojenkäsittelyllinen merkitys: täydellisessä binääripuussa on lehtisolmuja yksi enemmän kuin sisäsolmuja.

- Jos kysymyksessä on hakupuu, niin puun syvyyden n kasvattaminen $n+1$:een johtaa työmäärän kaksinkertaistumiseen.

Induktioperiatteesta käytetään usein tiettyjä muunnelmia.

- **Täydellinen induktio:**

  Jos $P(0)$ ja $\forall n \in \mathbb{N} : (\forall m \in \mathbb{N} : (m < n \rightarrow P(m)) \rightarrow P(n))$,
  niin $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$.

  Induktio-oletusta on siis vahvennettu.

Esimerkki. Jokainen luonnollinen luku $n > 1$ voidaan kirjoittaa alkulkujen tuloksi.

- **Yhtäaikainen induktio k:n eri ominaisuuden $P_1, \ldots, P_k$ suhteen:**

  Jos $P_1(0), \ldots, P_k(0)$ ja
  $\forall n \in \mathbb{N} : \forall i \in \{1, \ldots, k\} : (\forall j \in \{1, \ldots, k\} : P_j(n) \rightarrow P_i(n+1))$,
  niin $\forall n \in \mathbb{N} : P_1(n), \ldots, \forall n \in \mathbb{N} : P_k(n)$.

  Käyttökelpoinen tilanteissa, joissa $P_1, \ldots, P_k$ riippuvat toisistaan.

3.2 Joukko-opin peruskäsitteet

Tarkastellaan joukkoja $A = \{a, b\}$ ja $B = \{b, c\}$.

- Joukon jäsenyys: $a \in A$, $b \in A$ ja $c \notin A$
- Joukkojen yhtäsuuruus: $A \neq B$
  (koska A:lla ja B:llä ei ole samat alkiot).
- Tyhjä joukko: $\emptyset$ (tai vaihtoehtoisesti $\{\}$)
- Osajoukko: $\emptyset \subseteq A$, $A \not\subseteq B$ ja $B \not\subseteq A$.
- Aito osajoukko: $\emptyset \subset A$
- Joukkojen kardinaliteetti: $|\emptyset| = 0$ ja $|A| = |B| = 2$

Keskeisiä joukkojen välisiä operaatioita

Tarkastellaan edelleen joukkoja $A = \{a, b\}$ ja $B = \{b, c\}$:

- Joukkojen unioni: $A \cup B = \{a, b, c\}$
- Joukkojen leikkaus: $A \cap B = \{b\}$
- Joukkojen erotus: $A - B = \{a\}$ ja $B - A = \{c\}$
- Karteesinen tulo: $A \times B = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$
- Potenssijoukko (eli joukon kaikki osajoukot):
$$\mathbf{2}^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \text{ ja } |\mathbf{2}^A| = 2^{|A|} = 2^2 = 4.$$

Huom. Joukko $\mathbf{2}^\emptyset = \{\emptyset\}$ eli joukko, jonka alkiona on tyhjä joukko!

3.3 Relaatiot

- Joukkojen $A_1, \ldots, A_n$ *karteesinen tulo*
$A_1 \times \cdots \times A_n = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$.
- Jos $A_1 = A$, $\ldots$, $A_n = A$, saadaan
$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ kpl}} = \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1 \in A, \ldots, a_n \in A\}$.
Erikoistapaukset: $A^1 = \{\langle a\rangle \mid a \in A\} = A$ ja $A^0 = \{\langle\rangle\}$.
- Joukkojen $A_1, \ldots, A_n$ välinen n-paikkainen *relaatio* R on karteesisen tulon $A_1 \times \cdots \times A_n$ osajoukko.

Esimerkki. Kaksi relaatiota luonnollisten lukujen välillä:

$\{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ on pariton}\} \subseteq \mathbb{N}^1$

$\{\langle x, y, z\rangle \mid x^2 + y^2 = z^2,\ x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^3$

Keskeisiä relaatioiden ominaisuuksia

Binäärirelaatio $R \subseteq A \times A$ on

- *refleksiivinen*, joss kaikille $a \in A$ pätee $\langle a, a \rangle \in R$.
- *irrefleksiivinen*, joss kaikille $a \in A$ pätee $\langle a, a \rangle \notin R$.
- *symmetrinen*, joss kaikille $a \in A$ ja $b \in A$ pätee:
  jos $\langle a, b \rangle \in R$, niin $\langle b, a \rangle \in R$.
- *asymmetrinen*, joss kaikille $a \in A$ ja $b \in A$ pätee:
  jos $\langle a, b \rangle \in R$, niin $\langle b, a \rangle \notin R$.
- *transitiivinen*, joss kaikille $a \in A$, $b \in A$ ja $c \in A$ pätee:
  jos $\langle a, b \rangle \in R$ ja $\langle b, c \rangle \in A$, niin $\langle a, c \rangle \in R$.
- *ekvivalenssirelaatio*, joss R on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.

3.4 Funktiot

Funktio $f : A_1 \times \cdots \times A_n \to A$ on relaatio $f \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n \times A$, joka toteuttaa *funktionaalisuusehdon*:

kaikille $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$ on olemassa täsmälleen yksi $a \in A$ siten, että $\langle a_1, \ldots, a_n, a \rangle \in f$ (eli f:n arvo pisteessä $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$).

Kyseistä alkiota merkitään lausekkeella $f(a_1, \ldots, a_n)$.

Keskeisiä funktioiden ominaisuuksia

Funktio $f : A \to B$ on

- *injektio*, joss kaikille $a \in A$ ja $b \in A$ pätee $f(a) \neq f(b)$.
- *surjektio*, joss kaikille $b \in B$ on olemassa $a \in A$ siten, että $f(a) = b$.
- *bijektio*, joss f on sekä injektio että surjektio.