T-79.144 **Syksy 2001**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 8
(opetusmoniste, kappaleet 2.1 - 3.2)
6 - 9.11.2001

1. Olkoon universumina $\mathbb{N}^2 = \{\langle x, y\rangle | x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}\}$. Valitse vakiosymbolille c ja funktiosymbolille $f \in \mathcal{F}_1$ tulkinnat siten, että koko universumi tulee nimetyksi.

2. Graafi muodostuu solmujen joukosta S ja solmujen välisten kaarien $K \subseteq S \times S$ joukosta. Graafin solmuja s ja s' sanotaan vierekkäisiksi, jos niitä yhdistää kaari ($\langle s, s'\rangle \in K$). Olkoon C jokin värien joukko. Graafin *väritysongelmassa* on tarkoituksena löytää graafin solmuille värit joukosta C siten, että kaikilla vierekkäisillä solmuilla on eri värit.

a) Määrittele graafin väritysongelman ratkaisu predikaattilogiikan avulla.

b) Anna edellisen kohdan lausejoukolle malli ja

c) struktuuri, jossa se ei toteudu.

3. Osoita, että seuraavat lauseet eivät ole päteviä konstruoimalla struktuuri, jossa lause on epätosi (vastamalli).

a) $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y \forall x P(x, y)$

b) $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \to \exists x P(x) \land \exists x Q(x)$

c) $\neg \forall x(P(x) \to R(x)) \lor \neg \forall x(P(x) \to \neg R(x))$

4. Olkoon R kaksipaikkainen predikaattisymboli, jonka tulkintana on relaatio $R^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$ (joukko A on struktuurin $\mathcal{A}$ universumi). Alla on taulukko lauseista, jotka määrittelevät relaatiolle $R^{\mathcal{A}}$ erilaisia ominaisuuksia.

Ominaisuus	Määritelmä
refleksiivisyys	$\forall x R(x, x)$
irrefleksiivisyys	$\forall x \neg R(x, x)$
symmetrisyys	$\forall x \forall y(R(x, y) \to R(y, x))$
asymmetrisyys	$\forall x \forall y(R(x, y) \to \neg R(y, x))$
transitiivisyys	$\forall x \forall y \forall z(R(x, y) \land R(y, z) \to R(x, z))$
sarjallisuus	$\forall x \exists y R(x, y)$

Olkoon universumi A kaikkien ihmisten joukko. Anna esimerkkejä relaatioista $R^{\mathcal{A}}$, $(\emptyset \subset R^{\mathcal{A}} \subset A^2)$, joilla on yllä määriteltyjä ominaisuuksia.

5. Tutki semanttisella taululla:

a) $\{\forall x \exists y(P(x) \to Q(y)), \forall x P(x)\} \models \forall x Q(x)$.

b) $\{\forall x \forall y(\exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)) \to R(x,y)), R(a,b), R(b,a)\} \models R(a,a)$.

c) $\models \forall x \exists y R(x,y) \to (\forall y(\neg S(y) \to \neg \exists x R(x,y)) \to \exists x S(x))$.

6. Tiedetään, että

(i) kaikki syylliset ovat valehtelijoita,

(ii) ainakin yksi syytetyistä on myös todistaja ja

(iii) yksikään todistaja ei valehtele.

Todista, etteivät kaikki syytetyt ole syyllisiä. Käytä semanttista taulua.