Paketti II: PREDIKAATTILOGIIKKA

1. Predikaattilogiikan kieli
2. Predikaattilogiikan semantiikka
3. Semanttiset taulut predikaattilogiikalle
4. Hilbert-tyyppinen aksiomatisointi
5. Normaalimuodot
6. Herbrandin teoreema
7. Unifikaatio
8. Resoluutiosääntö ja -todistukset
9. Tietämyksen esittämisestä

1 Predikaattilogiikan kieli

Lauselogiikka useisiin tarkoituksiin liian yksinkertainen:

A = "a on viallinen", B = "b on viallinen", C = "c on viallinen"

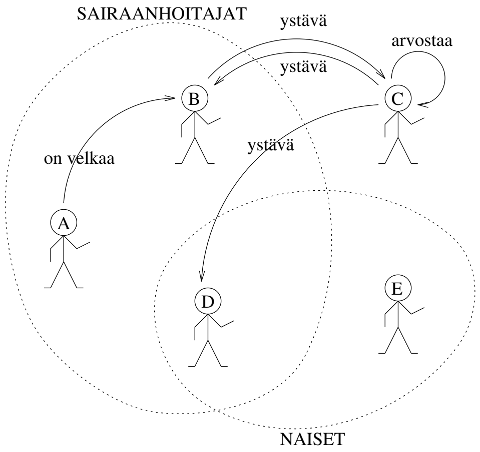
"kaikki ovat viallisia" = $A \wedge B \wedge C$

"jokin on viallinen" = $A \vee B \vee C$

C_d = "c on isompi kuin d", D_e = "d on isompi kuin e", ...

"jos x on isompi kuin y ja y on isompi kuin z,
niin x on isompi kuin z":

$(C_d \wedge D_e \rightarrow C_e) \wedge (C_e \wedge E_d \rightarrow C_d) \wedge (D_e \wedge E_c \rightarrow D_c) \wedge (D_e \wedge E_d \rightarrow D_d) \wedge \cdots$



Kielen symbolit

Predikaattilogiikan kielessä $\mathcal{L}$ käytetään seuraavia symboleja:

$x, y, z, v, x_0, x_1, \ldots, y_0, \ldots$	muuttujat
$c_1, c_2, \ldots$	vakiot
$f, g, h, f_0, f_1, \ldots, g_0, \ldots$	funktiosymbolit
$P, Q, R, P_0, P_1, \ldots, Q_0, \ldots$	predikaattisymbolit
$=$	yhtäsuuruuspredikaatti
$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$	lauselogiikan konnektiivit
$\exists$	eksistenssikvanttori: jollekin...
$\forall$	universaalikvanttori: kaikille...
$(,)$	sulut ja pilkku

Määritelmä.

1. Muuttujat ovat *termejä.*
2. Vakiot ovat *termejä.*
3. Jos f on n-paikkainen funktiosymboli ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat termejä, niin $f(t_1, \ldots, t_n)$ on *termi.*
4. Muita termejä ei ole.

Esim: x, c, $f(x)$, $f(f(f(f(f(x)))))$, $g(f(x), g(f(x), g(x, c)))$.

Määritelmä. Termi, jossa ei esiinny muuttujia, on *muuttujaton termi* (ground term).

Määritelmä. Olkoon P n-paikkainen predikaattisymboli ja olkoot $t_1, \ldots, t_n$ termejä. Tällöin seuraavat ovat *atomikaavoja.*

- $t_1 = t_2$
- $P(t_1, \ldots, t_n)$

Muita atomikaavoja ei ole.

Esimerkki. Atomikaavoja:

$$P(x_1) \qquad Q(c_1, x_1, y_1) \qquad x_1 = x_2$$
$$g(x_1, x_2) = f(f(c_1))$$
$$Q(x_1, c_1, f(x), h(f(x_1), c_1, x_1), x_2, x_2, x_3)$$

Määritelmä.

1. atomikaavat ovat *kaavoja*
2. jos ϕ ja ψ ovat kaavoja ja x on muuttuja, niin myös
   $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$, $((\forall x)\phi)$, $((\exists x)\phi)$
   ovat *kaavoja.*
3. muita kaavoja ei ole.

Predikaattilogiikan kaavoja: $P(c)$

$$((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)))$$
$$((\forall x)(P(x) \vee ((\exists y)Q(x, y))))$$
$$((\exists x)((\forall y)((\forall z)P(x, y, z))))$$

Predikaattilogiikan *kieli* $\mathcal{L}$ voidaan määritellä edellä annetuista symboleista muodostettavissa olevien kaavojen joukkona.

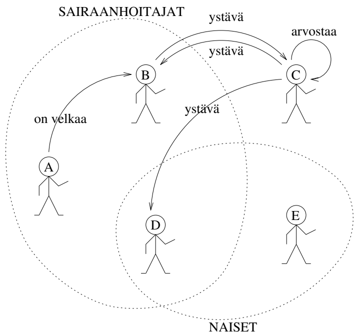
Olkoon t tuoli, h hattu, s sateenvarjo, $P(x, y)$: “x on y:n päällä”.

$\neg P(s, t)$
“sateenvarjo ei ole tuolin päällä”.

$\exists x \ P(x, h)$
“on olemassa sellainen x, että x on hatun päällä”, eli “hatun päällä on jotakin”.

$\exists x \forall y \ \neg P(y, x)$
“on olemassa sellainen x, että kaikille y, y ei ole x:n päällä”, eli “jonkin päällä ei ole mitään”.

$\forall x (P(x, h) \rightarrow P(x, t))$
“kaikille x: jos x on hatun päällä, niin x on tuolin päällä”, eli “kaikki hatun päällä olevat ovat tuolin päällä”.



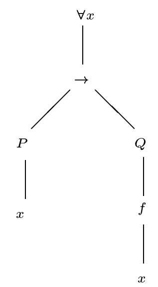
$N(e) \to A(c,c)$	$\exists x \exists y (Y(x,y) \wedge Y(y,x))$
$\exists x \exists y (S(x) \wedge S(y) \wedge V(x,y))$	$(\exists x (A(x,x))) \wedge (\exists x (S(x) \wedge N(x)))$
$\neg \forall x (S(x) \to N(x))$	$\forall x (Y(x,c) \to V(a,x))$

Kaavan jäsennyspuu

Predikaattilogiikan kaavoilla on yksikäsitteinen jäsennyspuu.

Kaavan $\forall x(P(x) \to Q(f(x)))$ jäsennyspuu on annettu oikealla.

Kyseinen kaava on muodoltaan universaalisti kvantifioitu kaava.



Huom!!! Jäsennyspuun juuressa oleva konnektiivi määrää edelleen, mitä muotoa lause on. Esimerkiksi $(\exists x P(x)) \to (\forall x P(x))$ on muodoltaan implikaatio, kun taas $\exists x(P(x) \to \forall y Q(y))$ on muodoltaan eksistentiaalisesti kvantifioitu kaava.

Vapaat ja sidotut muuttujat kaavassa

Määritelmä. Olkoot $\exists x \psi$ ja $\forall x \phi$ predikaattilogiikan kaavoja. Alikaava ψ on muuttujan x vaikutusalue (scope) kaavassa $\exists x \psi$. Alikaava ϕ on muuttujan x vaikutusalue kaavassa $\forall x \phi$.

Esimerkki.

$$\forall x \overbrace{(P(x) \to \exists y \underbrace{Q(x,y)}_{\text{y:n vaikutusalue}})}^{\text{x:n vaikutusalue}}$$

$$\exists x \overbrace{(Q(x) \to \forall y \underbrace{Q(y,z)}_{\text{y:n vaikutusalue}})}^{\text{x:n vaikutusalue}}$$

Määritelmä. Muuttujan x esiintymä kaavassa ψ on *sidottu*, jos se sijaitsee $\forall x$:n (tai $\exists x$:n) vaikutusalueessa. Kvanttorisymbolia seuraava muuttujaesiintymä on sidottu.

Jos muuttujan x esiintymä ei ole sidottu, niin x:n esiintymä on *vapaa*.

Muuttuja x *esiintyy vapaana* ϕ:ssä, jos sillä on vapaa esiintymä ϕ:ssä.

Kaava ϕ on *lause*, jos siinä ei ole vapaita muuttujaesiintymiä.

Esimerkki.

$$\forall \overbrace{x}^{S}(P(\overbrace{x}^{S}, \overbrace{y}^{V}, \overbrace{z}^{V}) \vee \exists \overbrace{y}^{S}(Q(\overbrace{y}^{S}) \to R(\overbrace{x}^{S}, \overbrace{z}^{V})))$$

Sijoitus kaavaan

Määritelmä. Olkoon $\phi(x)$ kaava, jossa muuttuja x mahdollisesti esiintyy vapaana ja t muuttujaton termi. Kaavalla $\phi(t)$ tarkoitetaan kaavaa $\phi(x)$, jossa jokainen muuttujan x vapaa esiintymä on korvattu termillä t.

Esimerkki.

1. Olkoon $\phi(y) = \exists x(P(x,y) \vee Q(y,x))$.

Nyt $\phi(c) = \exists x(P(x,c) \vee Q(c,x))$ ja
$\phi(f(f(d))) = \exists x(P(x, f(f(d))) \vee Q(f(f(d)), x))$.

2. Olkoon $\psi(x) = \exists x(P(x)) \wedge Q(x)$.

Nyt $\psi(c) = \exists x(P(x)) \wedge Q(c)$.

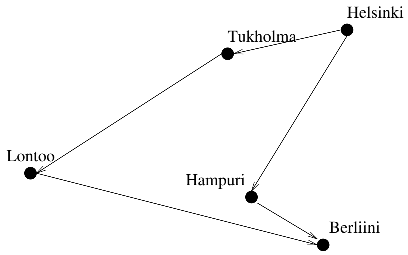
2 Predikaattilogiikan semantiikka

Määritelmä. *Struktuuri* (rakenne) $\mathcal{A}$ kielelle $\mathcal{L}$ koostuu

- universumista A, joka on jokin ei-tyhjä joukko,
- ja predikaatti-, vakio- ja funktiosymbolien tulkinnoista.
  - n-paikkaisen predikaattisymbolin P tulkintana on relaatio $P^{\mathcal{A}} \subseteq A \times \cdots \times A = A^n$.
  - Vakiosymbolin c tulkintana on universumin A alkio $c^{\mathcal{A}}$.
  - n-paikkaisen funktiosymbolin f tulkintana on funktio $f^{\mathcal{A}}$ joukolta A^n joukolle A.

Huomaa, että joukon A^n alkiot ovat monikkoja (tai jonoja) $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, missä alkiot $a_1 \in A, \ldots, a_n \in A$.

Esimerkkistruktuuri



$$
\begin{aligned}
A &= \{he, tu, ha, be, lo\} & \text{Helsinki}^{\mathcal{A}} &= he \\
\text{Tukholma}^{\mathcal{A}} &= tu & \text{Hampuri}^{\mathcal{A}} &= ha \\
\text{Berliini}^{\mathcal{A}} &= be & \text{Lontoo}^{\mathcal{A}} &= lo \\
\text{lento}^{\mathcal{A}} &= \{\langle he,tu\rangle, \langle tu,lo\rangle, \langle lo,be\rangle, \langle he,ha\rangle, \langle ha,be\rangle\} \subseteq A^2
\end{aligned}
$$

Muuttujattomien termien tulkinta

Määritelmä.

- Vakio c *nimeää* universumin alkion $c^{\mathcal{A}}$.
- Jos termit $t_1, \ldots, t_n$ nimeävät universumin alkion $t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}}$, niin $f(t_1, \ldots, t_n)$ *nimeää* universumin alkion $f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}})$.

Näin voimme viitata kielen $\mathcal{L}$ muuttujattomilla termeillä universumin A alkioihin (kunhan symbolien tulkinnat on annettu).

Kuulukoon kieleen $\mathcal{L}$ symbolit P, c, d, f, g. Olkoon struktuurin $\mathcal{A}$ universumi luonnolliset luvut $0, 1, 2, \ldots$ ja

$$
\begin{array}{rcl}
P^{\mathcal{A}} & = & \emptyset \text{ (tyhjä relaatio)} \\
c^{\mathcal{A}} & = & 1 \\
d^{\mathcal{A}} & = & 7 \\
f^{\mathcal{A}} & = & \text{seuraajafunktio, eli } f^{\mathcal{A}}(n) = n + 1 \\
g^{\mathcal{A}} & = & \text{summafunktio, eli } g^{\mathcal{A}}(n, m) = n + m \\
c & & \text{nimeää alkion 1} \\
d & & \text{nimeää alkion 7} \\
f(c) & & \text{nimeää alkion 2} \\
f(f(c)) & & \text{nimeää alkion 3} \\
g(f(c), d) & & \text{nimeää alkion 9}
\end{array}
$$

1. Konstruoidaan struktuuri $\mathcal{A}_1$ kielelle, jossa on 2-paikkainen predikaattisymboli O ja vakiosymbolit c, d, e. Olkoon $A = \{1, 2\}$.

$$
\begin{array}{ll}
O^{\mathcal{A}_1} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\} & d^{\mathcal{A}_1} = 2 \\
c^{\mathcal{A}_1} = 1 & e^{\mathcal{A}_1} = 1
\end{array}
$$

2. Konstruoidaan struktuuri $\mathcal{A}_2$ kielelle, jossa on 1- ja 2-paikkaiset predikaattisymbolit P_1, P_2, vakio c ja 1-paikkainen funktiosymboli f. Olkoon A luonnollisten lukujen joukko.

$$
\begin{array}{rcl}
P_1^{\mathcal{A}_2} & = & \{n | n \text{ on parillinen luonnollinen luku }\} \\
P_2^{\mathcal{A}_2} & = & \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \ldots\} \\
c^{\mathcal{A}_2} & = & 1024 \\
f^{\mathcal{A}_2} & = & \text{funktio } f^{\mathcal{A}_2}(n) = 3 \cdot n + 7
\end{array}
$$

Predikaattilogiikan totuusmääritelmä

Olkoon $\mathcal{A}$ struktuuri kielelle $\mathcal{L}$ siten, että jokainen A:n alkio on jonkin $\mathcal{L}$:n muuttujattoman termin nimeämä. Määritellään milloin lause ϕ on tosi struktuurissa $\mathcal{A}$ (merkitään $\mathcal{A} \models \phi$).

1. $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$ joss $t_1^{\mathcal{A}}$ ja $t_2^{\mathcal{A}}$ ovat sama universumim A alkio (t_1 ja t_2 ovat muuttujattomia termejä)
2. $\mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)$ joss $\langle t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}}\rangle \in P^{\mathcal{A}}$ ($t_1, \ldots, t_n$ ovat muuttujattomia termejä)
3. $\mathcal{A} \models \neg\psi$ joss $\mathcal{A} \not\models \psi$ (ei $\mathcal{A} \models \psi$)
4. $\mathcal{A} \models \psi \wedge \phi$ joss $\mathcal{A} \models \psi$ ja $\mathcal{A} \models \phi$
5. $\mathcal{A} \models \psi \vee \phi$ joss $\mathcal{A} \models \psi$ tai $\mathcal{A} \models \phi$

6. $\mathcal{A} \models \psi \to \phi$ joss $\mathcal{A} \not\models \psi$ tai $\mathcal{A} \models \phi$
7. $\mathcal{A} \models \psi \leftrightarrow \phi$ joss joko $\mathcal{A} \models \psi$ ja $\mathcal{A} \models \phi$ tai $\mathcal{A} \not\models \psi$ ja $\mathcal{A} \not\models \phi$
8. $\mathcal{A} \models \exists x \psi(x)$ joss $\mathcal{A} \models \psi(t)$ *jollekin* muuttujattomalle termille t
9. $\mathcal{A} \models \forall x \psi(x)$ joss $\mathcal{A} \models \psi(t)$ *kaikille* muuttujattomille termeille t

- Kohdissa 8 ja 9 oletetaan, että jokaisella A:n alkiolla a on nimi $\mathcal{A}$:ssa (muuttujaton termi t siten, että $t^{\mathcal{A}} = a$).
- Tarvittaessa kieli $\mathcal{L}$ ja struktuuri $\mathcal{A}$ voidaan täydentää (esim. lisäämällä vakioita) siten, että tämä vaatimus toteutuu.

Esimerkki. Olkoon kielessä $\mathcal{L}$ symbolit P, c, d. Olkoon $\mathcal{A}$:n universumi $A = \{1, 2\}$, $P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$, $c^{\mathcal{A}} = 1$ ja $d^{\mathcal{A}} = 2$.

1. Lauseen $P(c, d)$ totuus $\mathcal{A}$:ssa:

   $c^{\mathcal{A}} = 1$, $d^{\mathcal{A}} = 2$ ja $\langle 1, 2\rangle \in P^{\mathcal{A}}$, joten $\mathcal{A} \models P(c, d)$.

2. Lauseen $P(c, d) \vee P(d, c)$ totuus $\mathcal{A}$:ssa.

   $\langle 2, 1\rangle \notin P^{\mathcal{A}}$, joten $\mathcal{A} \not\models P(d, c)$.
   Disjunktion totuusmääritelmän perusteella
   $\mathcal{A} \models P(c, d) \vee P(d, c)$.

Onko lause $\forall x \exists y P(x, y)$ tosi struktuurissa $\mathcal{A}$?

1. Tutkitaan, onko $\mathcal{A} \models \exists y\ P(c, y)$.

   Koska $\mathcal{A} \models P(c, d)$ (todettiin edellä),
   $\mathcal{A} \models \exists y\ P(c, y)$.

2. Tutkitaan, onko $\mathcal{A} \models \exists y\ P(d, y)$.

   Koska $\mathcal{A} \models P(d, d)$ (eli $\langle 2, 2\rangle \in P^{\mathcal{A}}$),
   $\mathcal{A} \models \exists y\ P(d, y)$.

Koska kaikille muuttujattomille termeille t (tässä tapauksessa vakioille c ja d) pätee $\mathcal{A} \models \exists y\ P(t, y)$, niin $\mathcal{A} \models \forall x \exists y\ P(x, y)$.

Pätevyys ja toteutuvuus

Määritelmä. Kielen $\mathcal{L}$ lause ψ on *pätevä* (merkitään $\models \psi$), joss ψ on tosi jokaisessa $\mathcal{L}$:n struktuurissa.

Esimerkki. $\models (\forall x\ P(x)) \vee \neg(\forall x\ P(x))$
$\models (\forall x\ P(x)) \leftrightarrow (\neg \exists x\ \neg P(x))$

Määritelmä. Kielen $\mathcal{L}$ lause ψ on *toteutuva*, joss ψ on tosi ainakin yhdessä $\mathcal{L}$:n struktuurissa $\mathcal{A}$ (tällöin $\mathcal{A}$:ta kutsutaan ψ:n malliksi).

Esimerkki. $\exists x \forall y P(x, y)$ on toteutuva.
Olkoon $\mathcal{A}$:n universumi $A = \{1, 2\}$ ja $P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$.

Mallin käsite ja looginen seuraavuus

Määritelmä. Olkoon Σ joukko lauseita kielessä $\mathcal{L}$ ja olkoon $\mathcal{A}$ kielen $\mathcal{L}$ struktuuri. Struktuuri $\mathcal{A}$ *on lausejoukon* Σ *malli* (merkitään $\mathcal{A} \models \Sigma$), joss jokainen Σ:n lause on tosi $\mathcal{A}$:ssa.

Lausejoukko, jolla on ainakin yksi malli, on *toteutuva*.
Lausejoukko, jolla ei ole yhtään mallia, on *toteutumaton*.

Määritelmä. Kielen $\mathcal{L}$ lause ψ on $\mathcal{L}$:n lauseiden Σ *looginen seuraus* (merkitään $\Sigma \models \psi$), joss ψ on tosi jokaisessa Σ:n mallissa.

Väite. $\Sigma \models \psi$, joss $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ on toteutumaton.

Esimerkki. $\{\forall x P(x)\} \models \exists x P(x)$

Esimerkki

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \text{tentti(tiistai)} \\ \text{tentti(keskiviikko)} \\ \text{luento(keskiviikko)} \\ \forall x((\neg\text{tentti}(x) \land \neg\text{luento}(x)) \to \text{vapaa}(x)) \end{array} \right\}$$

Onko $\Sigma \models$ vapaa(perjantai)? Annetaan *vastamalli* $\mathcal{A}$, jonka perusteella $\Sigma \not\models$ vapaa(perjantai) (eli $\mathcal{A} \models \Sigma$ ja $\mathcal{A} \not\models$ vapaa(perjantai)). Olkoon universumi $A = \{t, k, p\}$.

$$\begin{array}{rclrcl} \text{tiistai}^{\mathcal{A}} & = & t & \text{keskiviikko}^{\mathcal{A}} & = & k \\ \text{perjantai}^{\mathcal{A}} & = & p & \text{tentti}^{\mathcal{A}} & = & \{t, k\} \\ \text{luento}^{\mathcal{A}} & = & \{k, p\} & \text{vapaa}^{\mathcal{A}} & = & \{\} \end{array}$$

3 Semanttiset taulut predikaattilogiikalle

$T(\forall x)\varphi(x)$ $\vert$ $T\varphi(t)$ t muuttujaton termi	$F(\exists x)\varphi(x)$ $\vert$ $F\varphi(t)$ t muuttujaton termi
$F(\forall x)\varphi(x)$ $\vert$ $F\varphi(c)$ c uusi vakio	$T(\exists x)\varphi(x)$ $\vert$ $T\varphi(c)$ c uusi vakio

Ohjeita semanttisten taulujen laadintaan:

- Lauseen rakenne määrää edelleen, mitä taulusääntöä tulee käyttää (jäsennyspuun juuressa oleva konnektiivi).
- Solmujen hajoittamisjärjestyksellä voi usein vaikuttaa taulun kokoon (haarautumista kannattaa välttää).
- Muotoa $T(\exists x)\varphi(x)$ tai $F(\forall x)\varphi(x)$ olevat solmut tulee hajoittaa *kertaalleen* jollekin *uudelle vakiolle* c.
- Muotoa $T(\forall x)\varphi(x)$ tai $F(\exists x)\varphi(x)$ olevat solmut tulee (tarvittaessa) hajoittaa kaikille *muuttujattomille termeille* t (vakioita tai vakioista ja funktiosymboleista rakentuvia termejä).
- Valitsemalla muuttujattomat termit t sopivasti voidaan usein nopeuttaa taulun valmistumista. Valinta tulee suorittaa *hajoittamishetkellä* (eikä myöhemmin).

Määritelmä. Taulu τ on lauseen φ *todistus*, jos taulun τ juuressa on $F\varphi$ ja τ on ristiriitainen.
Jos lauseella φ on todistus, on φ *teoreema* (merkitään $\vdash \varphi$).

Määritelmä. Lause φ *on johdettavissa* äärellisestä lausejoukosta $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ (merkitään $\Sigma \vdash \varphi$), joss seuraava taulu on laajennettavissa ristiriitaiseksi:

$$\begin{array}{c} T\alpha_1 \\ \vert \\ \vdots \\ \vert \\ T\alpha_n \\ \vert \\ F\varphi \end{array}$$

Esimerkkejä

Onko $\vdash \exists x \forall y \exists z \forall w\ P(x,y,z,w)$?

$$F\exists x\forall y\exists z\forall w\ P(x,y,z,w)$$
$$F\forall y\exists z\forall w P(a,y,z,w)\ ^{1.\,x/a}$$
$$F\exists z\forall w\ P(a,b,z,w)\ ^{2.\,y/b}$$
$$F\forall w\ P(a,b,a,w)\ ^{3.\,z/a}$$
$$FP(a,b,a,c)\ ^{4.\,w/c}$$
$$F\forall y\exists z\forall w\ P(b,y,z,w)\ ^{1.\,x/b}$$

jne.

Talua ei saada valmiiksi,
joten lause ei ole todistuva
(eikä näinollen pätevääkään).

Onko $\{(\exists x)(P(x) \land Q(x))\} \vdash P(a)$?

$$T(\exists x)(P(x) \land Q(x))$$
$$FP(a)$$
$$T(P(b) \land Q(b))\ ^{1.\,x/b}$$
$$TP(b)\ ^{3.}$$
$$TQ(b)\ ^{3.}$$

Taulu saatiin valmiiksi
muttei ristiriitaiseksi.
Lause ei ole johdettavissa.

Onko $\{P(a), (\forall x)(P(x) \to Q(x))\} \vdash Q(a)$?

$$T(\forall x)(P(x) \to Q(x))$$
$$TP(a)$$
$$FQ(a)$$
$$T(P(a) \to Q(a))\ ^{1.\,x/a}$$
$$FP(a)\ ^{4.} \qquad\qquad TQ(a)\ ^{4.}$$
$$\otimes \qquad\qquad \otimes$$

Taulu on ristiiriitainen.
Lause on siis johdettavissa (ja siten looginen seuraus).

Muita luennolla käsiteltyjä esimerkkejä (kommentti kertoo, mitä taulujen piirrettä on haluttu tuoda esille):

1. $\{\forall x P(x)\} \vdash \exists x P(x)$
   Valitaan termiksi esim. vakio a, vaikkei tämä esiinny lauseissa.
2. $\{\forall x P(x)\} \vdash P(a) \land P(b)$
   Sama solmu ($T\forall x P(x)$) hajoitetaan useaan kertaan.
3. $\{\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \land P(y,z) \to P(x,z)), P(a,b), P(b,c)\} \vdash P(a,c)$
   Oleellista x:n, y:n ja z:n korvaaminen oikeilla termeillä.
4. $\{\forall x P(x), \forall x (P(x) \to Q(x)), Q(a)\} \vdash \forall x Q(x)$
   Oleellista hajoitusjärjestys; ensin uusi vakio käyttöön.

Systemaattinen taulu

Lauselogiikka on *ratkeava*: on olemassa proseduureja, jotka

1. vastaavat KYLLÄ kun lause on pätevä
2. vastaavat EI kun lause ei ole pätevä

(Esim. totuustaulukot tai semanttinen taulu)

Predikaattilogiikka ei ole ratkeava, vaan *puoliratkeava*:

1. On olemassa proseduureja, jotka vastaavat KYLLÄ, kun syöte on pätevä lause.
2. Mikään tällainen proseduuri ei voi aina vastata EI, kun syöte ei ole pätevä lause (proseduuri ei anna vastausta ollenkaan).

Rakentamalla semanttiset taulut tietyllä tavalla systemaattisesti, voidaan taata, että taulu saadaan aina ristiriitaiseksi, kun sen juuressa on $F\varphi$ ja φ on pätevä.

Esimerkki. Luonnollisten lukujen >-relaatio.

$\forall x\ S(s(x), x)$	$S(x, y) =$ "x on suurempi kuin y"
$\forall x \forall y (S(x, y) \rightarrow S(s(x), y))$	$s(x) = x + 1$

Tarvitaan menetelmä, jolla generoidaan riittävä määrä kielen muuttujattomia termejä: $0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \ldots$

Jos taulussa esiintyy muotoa $T(\exists x)\varphi(x)$ tai $F(\forall x)\varphi(x)$ olevia solmuja, voidaan esimerkiksi indeksoimalla generoida riittävä määrä uusia vakioita: $c_0, c_1, c_2, \ldots$

Vastamallien konstruoinnista

Toisessa kotitehtävässä pyydetään antamaan struktuuri, jossa predikaattilogiikan lause on epätosi (halutaan siis *vastaesimerkkiä/vastamallia* lauseen pätevyydelle).

Jos lauseessa esiintyvät predikaatit ovat yksipaikkaisia, lauseelle voidaan antaa luonnollinen joukko-opillinen tulkinta.

Esimerkki. Tarkastellaan lausetta $\phi = \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$.

Olkoon $\mathcal{A}$ struktuuri ja c vakio, joka nimeää alkion $c^{\mathcal{A}}$. Nyt $\mathcal{A} \models P(c)$ täsmälleen silloin, kun $c^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$. Vastaavasti $\mathcal{A} \models Q(c)$, jos ja vain jos $c^{\mathcal{A}} \in Q^{\mathcal{A}}$. Siis $\mathcal{A} \models \phi$, jos ja vain jos $P^{\mathcal{A}} \subseteq Q^{\mathcal{A}}$.

Lause ϕ ei ole pätevä. Vastamalli saadaan esim. asettamalla struktuurin universumiksi $A = \{1\}$ ja valitsemalla tulkinnat $P^{\mathcal{A}} = \{1\}$ ja $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$ siten, ettei $P^{\mathcal{A}} \subseteq Q^{\mathcal{A}}$ toteudu.

Vastamallin konstruoinnissa voidaan hyödyntää myös semanttisen taulun ristiriidattomasta haarasta saatavia vaatimuksia.

$$\begin{array}{c} F(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))) \\ | \\ F(P(c) \rightarrow Q(c))\ ^{1.\,x/c} \\ | \\ T(P(c))\ ^{2.} \\ | \\ F(Q(c))\ ^{2.} \end{array}$$

Taulun ristiriidattoman haaran perusteella riittää, että struktuurin universumissa A on yksi alkio $c^{\mathcal{A}} = 1$ siten, että $1 \in P^{\mathcal{A}}$ ja $1 \notin Q^{\mathcal{A}}$. Tämä toteutuu mm. valinnoilla $P^{\mathcal{A}} = \{1\}$ ja $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$.

Menettely on käyttökelpoinen erityisesti, jos *valmiin taulun* ristiriidaton haara on *äärellinen* (kuten yllä).

Lisäesimerkki (kaksipaikkainen predikaatti):

$$\begin{array}{c}
F(\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))) \\
| \\
F(P(a,b) \wedge P(b,c) \rightarrow P(a,c)) \ ^{1.\, x/a, y/b, z/c} \\
| \\
T(P(a,b) \wedge P(b,c)) \ ^{2.} \\
| \\
F(P(a,c)) \ ^{2.} \\
| \\
T(P(a,b)) \ ^{3.} \\
| \\
T(P(b,c)) \ ^{3.}
\end{array}$$

$\Rightarrow A = \{1,2,3\}$, $a^{\mathcal{A}} = 1$, $b^{\mathcal{A}} = 2$, $c^{\mathcal{A}} = 3$ ja $P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle\}$.

Lisää joukko-opillisia tulkintoja (A on universumi):

$\forall x\ (P(x))$	saa tulkinnan	$P^{\mathcal{A}} = A$
$\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	"	$P^{\mathcal{A}} \subseteq \overline{Q^{\mathcal{A}}} = A - Q^{\mathcal{A}}$
$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$	"	$P^{\mathcal{A}} \cap Q^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$
$\forall x\ (P(x) \vee Q(x) \rightarrow R(x))$	"	$P^{\mathcal{A}} \cup Q^{\mathcal{A}} \subseteq R^{\mathcal{A}}$

Vastamallit kannattaa muodostaa mahdollisimman yksinkertaisiksi:

Tulkinta	Vastamalli (tulkinta epätosi)
$P^{\mathcal{A}} = A$	$A = \{1\}$, $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$
$P^{\mathcal{A}} \subseteq \overline{Q^{\mathcal{A}}} = A - Q^{\mathcal{A}}$	$A = \{1\}$, $P^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}} = \{1\}$
$P^{\mathcal{A}} \cap Q^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$	$A = \{1\}$, $P^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$
$P^{\mathcal{A}} \cup Q^{\mathcal{A}} \subseteq R^{\mathcal{A}}$	$A = \{1\}$, $P^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{A}} = \emptyset$, $Q^{\mathcal{A}} = \{1\}$

4 Hilbert-tyyppinen aksiomatisointi

Aksiomat:

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
3. $(\neg \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
4. $(\forall x)\alpha(x) \rightarrow \alpha(t)$ kaikille termeille t (sijoitettavissa α:aan)
5. $(\forall x)(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\forall x)\beta)$, jos x ei esiinny α:ssa vapaana

Päättelysäännöt: $\dfrac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}$ (MP) $\dfrac{\alpha}{(\forall x)\alpha}$ (Yleistys)

Määritelmä. Olkoon Σ joukko lauseita.

Todistus Σ:sta on jono kaavoja $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ siten, että kaikille $i \in \{1, \ldots, n\}$

- $\alpha_i \in \Sigma$,
- α_i on aksioma, tai
- α_i on saatu päättelysäännöllä aikaisemmista kaavoista.

Lause α on *johdettavissa* lausejoukosta Σ (merkitään $\Sigma \vdash \alpha$), jos on olemassa todistus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ lausejoukosta Σ siten, että $\alpha = \alpha_n$.

Lause α on *teoreema/todistuva* (merkitään $\vdash \alpha$), jos se on johdettavissa tyhjästä lausejoukosta $\Sigma = \emptyset$.

Esimerkki

1.	$P(x) \to ((P(x) \to P(x)) \to P(x))$	Ax1
2.	$(P(x) \to ((P(x) \to P(x)) \to P(x)))$	
	$\to ((P(x) \to (P(x) \to P(x))) \to (P(x) \to P(x)))$	Ax2
3.	$(P(x) \to (P(x) \to P(x))) \to (P(x) \to P(x))$	MP,1,2
4.	$P(x) \to (P(x) \to P(x))$	Ax1
5.	$P(x) \to P(x)$	MP,3,4
6.	$\forall x(P(x) \to P(x))$	Yleistys,5

5 Normaalimuodot

Prenex-normaalimuoto

Predikaattilogiikan lause α joka on muotoa $\mathcal{Q}_1 x_1 \mathcal{Q}_2 x_2 \cdots \mathcal{Q}_n x_n \phi$, missä kukin $\mathcal{Q}_i$ on kvanttori ($\forall$ tai $\exists$), ja ϕ ei sisällä kvanttoreita, on *prenex*-normaalimuodossa.

Esimerkki.

$\forall x P(x)$ $\qquad$ $\forall x \exists y\ P(x,y)$

$\forall x \exists y \forall z \forall w (P(x,y,z) \to (Q(y,z,w) \to R(z,w,x)))$ $\qquad$ $P(a)$

Väite. Jokainen predikaattilogiikan lause on loogisesti ekvivalentti jonkin prenex-normaalimuodossa olevan lauseen kanssa.

Lauseiden muuttaminen prenex-normaalimuotoon

Poistetaan konnektiivit $\to$ ja $\leftrightarrow$:

$$\begin{aligned} \phi \to \psi &\quad\Rightarrow\quad \neg\phi \vee \psi \\ \phi \leftrightarrow \psi &\quad\Rightarrow\quad (\neg\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg\psi) \end{aligned}$$

Negaatiot sisään, kvanttorit ulos (z on uusi muuttuja):

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \vec{\mathcal{Q}}x\neg\forall y\varphi & \Rightarrow & \vec{\mathcal{Q}}x\exists y\neg\varphi & \vec{\mathcal{Q}}x\neg\exists y\varphi & \Rightarrow & \vec{\mathcal{Q}}x\forall y\neg\varphi \\ \neg\neg\varphi & \Rightarrow & \varphi & \neg(\varphi \vee \psi) & \Rightarrow & \neg\varphi \wedge \neg\psi \\ \neg(\varphi \wedge \psi) & \Rightarrow & \neg\varphi \vee \neg\psi & \vec{\mathcal{Q}}x(\forall y\varphi \vee \psi) & \Rightarrow & \vec{\mathcal{Q}}x\forall z(\varphi(y/z) \vee \psi) \end{array}$$

Viimeisestä säännöstä tarvitaan versiot, joissa disjunktit ovat päinvastaisessa järjestyksessä, joissa $\forall$:in tilalla $\exists$, ja jossa disjunktion sijasta konjunktio (7 sääntöä lisää).

Esimerkki

$\neg\forall x(P(x) \to \exists z\ R(z,x)) \vee \exists x\ Q(x)$

$\neg\forall x(\neg P(x) \vee \exists z\ R(z,x)) \vee \exists x\ Q(x)$

$\exists x\neg(\neg P(x) \vee \exists z\ R(z,x)) \vee \exists x\ Q(x)$

$\exists x(\neg\neg P(x) \wedge \neg\exists z\ R(z,x)) \vee \exists x\ Q(x)$

$\exists x(P(x) \wedge \forall z\neg R(z,x)) \vee \exists x\ Q(x)$

$\exists x_1(\exists x(P(x) \wedge \forall z\neg R(z,x)) \vee Q(x_1))$

$\exists x_1\exists x_2((P(x_2) \wedge \forall z\neg R(z,x_2)) \vee Q(x_1))$

$\exists x_1\exists x_2(\forall z_1(P(x_2) \wedge \neg R(z_1,x_2)) \vee Q(x_1))$

$\exists x_1\exists x_2\forall z_1((P(x_2) \wedge \neg R(z_1,x_2)) \vee Q(x_1))$

Konjunktiivinen normaalimuoto

Määritelmä. Predikaattilogiikan lause on konjunktiivisessa normaalimuodossa, kun se on prenex-normaalimuodossa, ja sen kvanttoreita sisältämätön osa on muotoa $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$, missä kukin ϕ_i on literaalien $l_1, \ldots, l_{m_i}$ disjunktio $l_1 \vee \cdots \vee l_{m_i}$. (Literaalit ovat atomikaavoja tai niiden negaatioita).

Esim.
$\forall x \exists y \forall z((\neg P(x,y) \vee Q(y,x)) \wedge R(z) \wedge (\neg R(x) \vee P(y,z) \vee Q(x,z)))$

Esimerkki jatkuu

Lause on muutettu prenex-normaalimuotoon, josta jatketaan konjunktiiviseen normaalimuotoon.

$$\neg\forall x(P(x) \rightarrow \exists z\ R(z,x)) \vee \exists x\ Q(x)$$
$$\vdots$$
$$\exists x_1 \exists x_2 \forall z_1((P(x_2) \wedge \neg R(z_1,x_2)) \vee Q(x_1))$$
$$\exists x_1 \exists x_2 \forall z_1((P(x_2) \vee Q(x_1)) \wedge (\neg R(z_1,x_2) \vee Q(x_1)))$$

Eksistenssikvanttorien eliminointi

- Summafunktiolla on vasen identiteetti: $\exists x \forall y(x+y=y)$
  Esitellään symboli tälle identiteettialkiolle: $\forall y(0+y=y)$
- Jokaisella kokonaisluvulla on vastaluku: $\forall x \exists y(x+y=0)$
  Esitellään vastalukufunktio $-x$: $\forall x(x+-x=0)$

Skolemointi

Olkoon $\vec{Q}x\phi$ prenex-normaalimuodossa.

Sisältäköön $\vec{Q}x$ kvanttorin $\exists x_i$, ja $\exists x_i$:tä edeltää universaalikvanttorit $\forall x_{n_1}, \forall x_{n_2}, \ldots, \forall x_{n_m}$.

Poista kvanttori $\exists x_i$, ja korvaa x_i:n jokainen esiintymä termillä $f(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_m})$, missä f on uusi funktiosymboli.

Jos $\exists x_i$:tä ei edellä ainutkaan universaalikvanttori, korvataan x_i uudella vakiolla c.

Esimerkkejä

$$\begin{aligned}
\exists x\ P(x) &\Rightarrow P(c) \\
\exists x \forall y\ P(x,y) &\Rightarrow \forall y\ P(c,y) \\
\forall x \exists y\ P(x,y) &\Rightarrow \forall x\ P(x, f(x)) \\
\forall x \exists y \forall z \exists w\ P(w,z,y,x) &\Rightarrow \forall x \forall z\ P(g(x,z), z, f(x), x) \\
\exists x \exists y \forall z\ P(x,y,z) &\Rightarrow \forall z\ P(c_1, c_2, z) \\
\forall x \exists y \exists z\ P(x,y,z) &\Rightarrow \forall x\ P(x, f_1(x), f_2(x))
\end{aligned}$$

Skolemoinnin ominaisuudet

Väite. Prenex-normaalimuodossa oleva lause φ on toteutuva jos ja vain jos sen skolemoitu muoto φ' on toteutuva.

Huom. Prenex-normaalimuodossa olevan lauseen φ skolemoitu muoto φ' **ei aina ole** loogisesti ekvivalentti φ:n kanssa.

Esimerkki. Lause $\exists x P(x)$ ja sen skolemoitu muoto $P(c)$.

Nyt $\models P(c) \to \exists x\ P(x)$, mutta $\not\models \exists x P(x) \to P(c)$.

Vastamalli $\mathcal{A}$: universumi $A = \{1,2\}$, $c^{\mathcal{A}} = 1$, $d^{\mathcal{A}} = 2$ ja $P^{\mathcal{A}} = \{2\}$.
Nyt $\mathcal{A} \models \exists x P(x)$, mutta $\mathcal{A} \not\models P(c)$.

Täten myös $\not\models \exists x\ P(x) \leftrightarrow P(c)$.

Lauseiden klausuulimuoto predikaattilogiikassa

lause $\Rightarrow$ prenex-normaalimuoto
$\Rightarrow$ konjunktiivinen normaalimuoto
$\Rightarrow$ skolemoidaan
$\Rightarrow$ klausuuliesitys (joukko literaalien joukkoja)

Esimerkki. Haetaan klausuuliesitys lauseelle
$\forall x(\neg(P(x) \to \forall y Q(x,y)) \vee R(x))$:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \forall x \exists z((P(x) \wedge \neg Q(x,z)) \vee R(x)) \\
&\Rightarrow \forall x \exists z((P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg Q(x,z) \vee R(x))) \\
&\Rightarrow \forall x((P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg Q(x, f(x)) \vee R(x))) \\
&\Rightarrow \{\{P(x), R(x)\}, \{\neg Q(x, f(x)), R(x)\}\}
\end{aligned}$$

Huom! Jos lause on muodoltaan *konjunktio* $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$, on mahdollista viedä lauseet $\phi_1, \ldots, \phi_n$ klausuulimuotoon *erikseen*.

Esimerkki. $\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)$. Konjunktion alilauseille saadaan klausuuliesitykset $\{\{P(x)\}\}$ ja $\{\{Q(c)\}\}$ ja näinollen koko lauseen klausuuliesitys on näiden unioni $\{\{P(x)\}, \{Q(c)\}\}$.

Huom! Existenssikvanttorit kannattaa tuoda ulos lauseen rakenteesta ennen universaalikvanttoreita (mikäli mahdollista).

Esimerkki. Siis $\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$ kirjoitetaan muotoon $\exists y_1 \forall x_1 (P(x_1) \vee Q(y_1))$ eikä muotoon $\forall x_1 \exists y_1 (P(x_1) \vee Q(y_1))$.

Näin ehkä vältetään Skolem-funktioiden käyttöönotto (tai ainakin vähennetään Skolem-funktioiden argumenttien lukumäärää) $\Rightarrow$ klausuulimuodosta tulee rakenteeltaan yksinkertaisempi.

6 Herbrandin teoreema

Kielen $\mathcal{L}$ muuttujattomien termien joukko on kielen $\mathcal{L}$ *Herbrand-universumi.*

Herbrand-struktuuri kielelle $\mathcal{L}$ on sellainen struktuuri $\mathcal{H}$, jossa

- domain on $\mathcal{L}$:n Herbrand-universumi, ja
- funktion f tulkinta $f^{\mathcal{H}}$ on funktio joka kuvaa universumin alkiot $t_1, \ldots, t_n$ termiksi (universumin alkioksi) $f(t_1, \ldots, t_n)$, ja
- vakion c tulkinta $c^{\mathcal{H}}$ on c itse.

Esimerkki. Kielessä on vakio c ja funktiosymboli $f(\ldots, \ldots)$.

Herbrand-universumi on
$c, f(c,c), f(f(c,c),c), f(c, f(c,c)), f(f(c,c), f(c,c)), \ldots$.

Esimerkki

$S = \{\{P(a)\}, \{\neg Q(x), P(x)\}, \{\neg Q(x), R(x, f(x))\}\}$,
predikaattikalkyylin lauseena
$\forall x(P(a) \wedge (\neg Q(x) \vee P(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee R(x, f(x))))$.

- S:n Herbrand-universumi on $H = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$.
- Eräs Herbrand-struktuuri on $\mathcal{H}$, jonka domain on H ja

$$\begin{aligned}
a^{\mathcal{H}} &= a \\
f^{\mathcal{H}} &= \text{funktio, joka kuvaa kunkin termin } t \text{ termille } f(t) \\
P^{\mathcal{H}} &= \{a, f(a), f(f(f(a)))\} \\
Q^{\mathcal{H}} &= \{f(a)\} \\
R^{\mathcal{H}} &= \{\langle a, f(a)\rangle, \langle f(a), f(f(a))\rangle\}.
\end{aligned}$$

- Herbrand-kanta B koostuu *atomisista lauseista*, jotka voidaan konstruoida käyttäen kielen $\mathcal{L}$ predikaattisymboleja ja Herbrand-universumin U muuttujattomia termejä:
$B = \{P(a), Q(a), R(a,a), P(f(a)), Q(f(a)), R(a, f(a)), \ldots\}$.
- Herbrand-struktuuri voidaan antaa literaalijoukkona

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \{P(a), \neg Q(a), \neg R(a,a), P(f(a)), Q(f(a)), R(a, f(a)), \\
&\quad \neg R(f(a), a)), \neg R(f(a), f(a)), \ldots\},
\end{aligned}$$

joka määrittelee, mitkä atomiset lauseet ovat tosia/epätosia $\mathcal{H}$:ssa tai vaihtoehtoisesti Herbrand-kannan B osajoukkona

$$\mathcal{H} = \{P(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(a, f(a)), \ldots\},$$

joka määrittelee, mitkä atomiset lauseet ovat tosia $\mathcal{H}$:ssa.

Herbrandin teoreema

Instantioidessa klausuulien muuttujia käytetään Herbrand-universumin U muuttujattomia termejä.

Esimerkki. Jos $S = \{\{P(a)\}, \{\neg P(x), P(f(x))\}\}$, niin Herbrand-universumi $H = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$ ja S:n muuttujattomien instanssien joukko on
$S' = \{\{P(a)\}, \{\neg P(a), P(f(a))\}, \{\neg P(f(a)), P(f(f(a)))\}, \ldots\}$.

Väite. (Kirjassa T10.4 ja T10.6) Olkoon S joukko klausuuleita.

- S on toteutumaton **joss** sen kaikkien klausuulien muuttujattomien instanssien joukko S' on toteutumaton.
- S on toteutumaton **joss** on olemassa äärellinen toteutumaton joukko S' joukon S klausuulien muuttujattomia instansseja.

Huomioita

- Muuttujattomien instanssien joukko S' voidaan tulkita lauselogiikan klausuulijoukoksi, jos Herbrand-kannan B atomiset lauseet tulkitaan lauselogiikan atomisiksi lauseiksi.

  $\Rightarrow$ predikaattilogiikan päättely palautuu lauselogiikan päättelyksi
- Jos S:ssä ei esiinny funktiosymboleja, Herbrand-kanta H on äärellinen ja Herbrand-instanssien joukko S' jää myös äärelliseksi.

  $\Rightarrow$ S':n toteutuvuus voidaan selvittää äärellisessä ajassa.

  $\Rightarrow$ predikaattilogiikka on ratkeava tässä rajoitetussa tapauksessa.

Esimerkki. Klausuulijoukolle $S = \{\{P(a)\}, \{\neg P(x), P(b)\}\}$ Herbrand-universumi $H = \{a, b\}$ ja Herbrand-instanssien joukko $S' = \{\{P(a)\}, \{\neg P(a), P(b)\}, \{\neg P(b), P(b)\}\}$, joka voidaan nähdä lauselogiikan klausuulijoukkona $S' = \{\{P\}, \{\neg P, Q\}, \{\neg Q, Q\}\}$.

7 Unifikaatio

Määritelmä. Äärelliset joukot $\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_n/t_n\}$, missä x_i ovat muuttujia (x_i on eri muuttuja kuin x_j, jos $i \neq j$) ja termi t_i ei ole x_i, ovat *substituutioita*.

Jos t_i:t ovat muuttujattomia, substituutio on *muuttujaton*.

Jos t_i:t ovat muuttujia, substituutio on *nimeämissubstituutio*.

Määritelmä. Olkoon E termi, literaali tms. ja $\theta = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ substituutio. $E\theta$ on kuten E, paitsi että kukin x_i:n esiintymä E:ssä on korvattu termillä t_i.

Jos $E\theta$:ssa ei esiinny muuttujia, $E\theta$ on E:n muuttujaton instanssi.

Esimerkki. Olkoon $E = P(x, y, z, v, w)$ ja $\theta = \{x/y, y/x, z/x, v/f(x), w/g(f(y), c)\}$. Nyt $E\theta$ on

$$P(y, x, x, f(x), g(f(y), c))$$

Määritelmä.
Olkoot $\theta = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ ja $\lambda = \{y_1/u_1, \ldots, y_m/u_m\}$. Substituutioiden θ ja λ *kompositio* $\theta\lambda$ (tai $\theta \circ \lambda$) on joukko

$$\{x_1/t_1\lambda, \ldots, x_n/t_n\lambda, y_1/u_1, \ldots, y_m/u_m\}$$

josta on poistettu alkiot $x_i/t_i\lambda$ joille $t_i\lambda = x_i$ ja alkiot y_i/u_i joille $y_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Ajatus: $E(\theta\lambda) = (E\theta)\lambda$

Esimerkki. Olkoon

$$\begin{aligned} \theta &= \{x_1/t_1, x_2/t_2\} = \{x/f(y), y/z\} \\ \lambda &= \{y_1/u_1, y_2/u_2, y_3/u_3\} = \{x/a, y/b, z/y\}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$\{x_1/t_1\lambda, x_2/t_2\lambda, y_1/u_1, y_2/u_2, y_3/u_3\} =$$
$$\{x/f(b), y/y, x/a, y/b, z/y\}$$

Koska $t_2\lambda = x_2$ ja $y_1, y_2 \in \{x_1, x_2, x_3\}$, tulee ylläolevasta joukosta poistaa vastaavat elementit. Substituutio $\theta\lambda$ on siis

$$\{x_1/t_1\lambda, y_3/u_3\} = \{x/f(b), z/y\}.$$

Unifioijat

Olkoon $S = \{E_1, \ldots, E_n\}$ joukko termejä (tai literaaleja tms.). Substituutio θ on S:n *unifioija*, jos $E_1\theta = E_2\theta = \cdots = E_n\theta$.

Jos S:lle on unifioija, on S *unifioituva*.

Esimerkki.

joukko	unifioija
$\{P(x, f(a)), P(y, z)\}$	$\{y/x, z/f(a)\}$ tai $\{x/y, z/f(a)\}$
$\{P(x, f(x)), P(f(a), y)\}$	$\{x/f(a), y/f(f(a))\}$
$\{P(a), P(f(x))\}$	ei unifioijaa
$\{P(x), P(f(x))\}$	ei unifioijaa (termit aina äärellisiä)

Joukon $\{E_1, \ldots, E_n\}$ unifioija σ on *yleisin unifioija*, jos jokaiselle ko. joukon unifioijalle θ on olemassa substituutio λ siten että $\theta = \sigma\lambda$.

Esimerkki. Joukon $L = \{P(x, f(y)), P(a, z)\}$ unifioijia ovat mm.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \{x/a, z/f(b), y/b\} \\ \lambda_2 &= \{x/a, z/f(y)\} \end{aligned}$$

λ_2 on L:n yleisin unifioija:

$$\lambda_1 = \lambda_2\{y/b\}$$

Väite. Olkoot θ ja σ joukon S yleisimpiä unifioijia. Tällöin on olemassa nimeämissubstituutio λ siten että $S\theta\lambda = S\sigma$.

Unifikaatioalgoritmi

Erojoukko $D(S)$ ei-tyhjälle joukolle atomikaavoja S on

1. ensimmäiset eroavat termit, tai
2. jos predikaattisymbolit eivät samoja, atomikaavat itse.

Esimerkki. Joukon $S = \{P(x), Q(y)\}$ erojoukko $D(S) = S$.

Joukon $S = \{P(x, y), P(x, g(z))\}$ erojoukko $D(S) = \{y, g(z)\}$.

Unifikaatioalgoritmi:

1. $k := 0$, $S_k := S$ ja $\sigma_k := \epsilon$
2. Jos S_k on yksialkioinen joukko, lopeta algoritmin suoritus: S on unifioituva.
   Muussa tapauksessa etsi S_k:n erojoukko $D(S_k)$.
3. Jos $D(S_k)$:ssa on alkiot v_k ja t_k siten että v_k on muuttuja, joka ei esiinny t_k:ssa, mene kohtaan 4. Muussa tapauksessa lopeta algoritmin suoritus: S ei ole unifioituva.
4. $\sigma_{k+1} := \{v_k/t_k\}$ ja $S_{k+1} := S_k\{v_k/t_k\}$.
5. $k := k + 1$ ja mene kohtaan 2.

Väite. Olkoon S äärellinen ei-tyhjä joukko atomikaavoja:

- jos S on unifioituva, niin unifikaatioalgoritmin laskenta päättyy askeleen 2 kohdalla ja $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \ldots \sigma_k$ on S:n yleisin unifioija
- jos S ei ole unifioituva, niin unifikaatioalgoritimin laskenta päättyy askeleen 3 lopuksi.

Esimerkki. Lasketaan unifikaatioalgoritmilla joukon $S = \{P(x, f(x)), P(g(a), z)\}$ yleisin unifioija.

1. $S_0 = \{P(x, f(x)), P(g(a), z)\}, \sigma_0 = \epsilon$
2. $D(S_0) = \{x, g(a)\}$
3. alkio $v_0 = x$ ja $t_0 = g(a)$
4. $\sigma_1 = \{x/g(a)\}, S_1 = \{P(g(a), f(g(a))), P(g(a), z)\}$
2. $D(S_1) = \{f(g(a)), z\}$
3. alkio $v_1 = z$ ja $t_1 = f(g(a))$
4. $\sigma_2 = \{z/f(g(a))\}$, $S_2 =$
   $\{P(g(a), f(g(a))), P(g(a), f(g(a))) = \{P(g(a), f(g(a)))\}$
2. S_2 on yksialkioinen, joten S on unifioituva.

Yleisin unifioija on $\sigma = \sigma_0\sigma_1\sigma_2 = (\epsilon\{x/g(a)\})\{z/f(g(a))\} = \{x/g(a), z/f(g(a))\}$ ja $S\sigma = \{P(g(a), f(g(a)))\}$.

8 Resoluutiosääntö ja -todistukset

Olkoot C_1 ja C_2 klausuuleja, joissa *ei ole yhteisiä* muuttujia, ja jotka ovat muotoa $C_1' \sqcup \{P(\vec{t_1}), P(\vec{t_2}), \ldots, P(\vec{t_n})\}$ ja $C_2' \sqcup \{\neg P(\vec{s_1}), \neg P(\vec{s_2}), \ldots, \neg P(\vec{s_m})\}$.

Jos σ on joukon $\{P(\vec{t_1}), P(\vec{t_2}), \ldots, P(\vec{t_n}), P(\vec{s_1}), P(\vec{s_2}), \ldots, P(\vec{s_m})\}$ yleisin unifioija (MGU), niin $C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$ on C_1:n ja C_2:n resolventti.

Huom. merkintä $A \sqcup B$ tarkoittaa keskenään alkiovieraiden ($A \cap B = \emptyset$) joukkojen A ja B unionia $A \cup B$.

Esimerkki

Olkoot

$$\begin{aligned} C_1 &= \{Q(x), \neg R(y), P(x, y), P(f(z), f(z))\} \\ C_2 &= \{\neg N(u), \neg R(w), \neg P(f(a), f(a)), \neg P(f(w), f(w))\} \end{aligned}$$

Joukon $\{P(x, y), P(f(z), f(z)), P(f(a), f(a)), P(f(w), f(w))\}$ yleisin unifioija on $\sigma = \{x/f(a), y/f(a), z/a, w/a\}$.

Klausuulien resolventti on $\{Q(f(a)), \neg R(f(a)), \neg N(u), \neg R(a)\}$.

Resoluution virheettömyys ja täydellisyys

Väite. Klausuulijoukko S on toteutumaton jos ja vain jos S:stä päästään resoluutiosäännöllä tyhjään klausuuliin $\Box$.

Tämän perusteella resoluutiota voidaan käyttää pätevyyden $\models \phi$ ja loogisen seuraavuuden $\Sigma \models \phi$ osoittamiseen/tutkimiseen:

Väite. $\models \phi$ jos ja vain jos lauseen $\neg\phi$ klausuulimuodosta saadaan resoluutiolla tyhjä klausuuli $\Box$.

Väite. $\Sigma \models \phi$ jos ja vain jos lausejoukon $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ klausuulimuodosta saadaan resoluutiolla tyhjä klausuuli $\Box$.

Huomaa, että yllämainitun lausejoukon $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ lauseet voidaan saattaa klausuulimuotoon erikseen!!! Resoluutiossa käytetään lauseista saatavien klausuulijoukkojen unionia.

Osoita $P(a) \wedge \neg Q(a) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ toteutumattomaksi.

1. $\{P(a)\}$	P
2. $\{\neg Q(a)\}$	P
3. $\{\neg P(x), Q(x)\}$	P
4. $\{Q(a)\}$	1, 3, MGU $\{x/a\}$
5. $\Box$	2, 4, MGU ϵ

Osoita $\models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$.

$$\begin{aligned} \neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)) &\Rightarrow \neg(\neg\forall x P(x) \vee \exists x P(x)) \\ &\Rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x \neg P(x) \\ &\Rightarrow \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1) \wedge \neg P(x_2)) \end{aligned}$$

Saadaan klausuulijoukko $S = \{\{P(x_1)\}, \{\neg P(x_2)\}\}$.

Klausuuleista $\{P(x_1)\}$ ja $\{\neg P(x_2)\}$ saadaan $\Box$ (MGU $\{x_1/x_2\}$).

Osoita $\{\forall x(I(x) \rightarrow E(x)), \exists x(I(x) \wedge K(x))\} \models \exists x(E(x) \wedge K(x))$.

Saatetaan lauseet klausuulimuotoon:

$$\begin{aligned} \forall x(I(x) \rightarrow E(x)) &\Rightarrow \forall x(\neg I(x) \vee E(x)) \\ &\Rightarrow \{\neg I(x), E(x)\}. \\ \exists x(I(x) \wedge K(x)) &\Rightarrow I(c) \wedge K(c) \\ &\Rightarrow \{I(c)\}, \{K(c)\} \\ \neg\exists x(E(x) \wedge K(x)) &\Rightarrow \forall x \neg(E(x) \wedge K(x)) \\ &\Rightarrow \forall x(\neg E(x) \vee \neg K(x)) \\ &\Rightarrow \{\neg E(x), \neg K(x)\} \end{aligned}$$

Kokonaisuutena saadaan siis klausuulijoukko $S = \{\{\neg I(x), E(x)\}, \{I(c)\}, \{K(c)\}, \{\neg E(x), \neg K(x)\}\}$.

1. $\{\neg I(x), E(x)\}$	P
2. $\{I(c)\}$	P
3. $\{K(c)\}$	P
4. $\{\neg E(y), \neg K(y)\}$	P $\{x/y\}$
5. $\{\neg I(y), \neg K(y)\}$	1, 4, MGU $\{x/y\}$
6. $\{\neg K(c)\}$	2, 5, MGU $\{y/c\}$
7. $\Box$	3, 6, MGU ϵ

Huom. Todistuksen 4. klausuuli on saatu uudelleennimeämällä S:n viimeisen klausuulin muuttuja x muuttujaksi y, koska resoluutiosääntö edellyttää tätä.

Unifioijien kompositio on $\{x/c, y/c\}$.

Ohjeita resoluutiotodistusten kirjoittamiseen

- Muuttujien uudelleennimeäminen on hyvä suorittaa systemaattisesti (esimerkiksi alaindeksien avulla).
- Yksittäistä klausuulijoukon klausuulia saatetaan tarvita useita kertoja resoluutiotodistuksessa (jolloin muuttujien uudelleennimeäminen on välttämätöntä).
- Kirjoita yleisimmät unifioijat (MGU:t) näkyviin.
- Jos et kirjoita todistusta binääripuun muotoon, numeroi klausuulit ja merkitse näkyviin mistä klausuuleista mikin klausuuli on saatu (resoluutiolla).
- Merkitse yleisimpien unifioijien kompositio näkyviin.

Laajempi esimerkki

Esitetään listat vakion e ja kaksipaikkaisen funktiosymbolin c avulla (näin lista `[1,2]` saa esityksen $c(1, c(2, e))$). Määritellään predikaatit

- $K(x, y)$ = "listan x alkiot ovat listan y alkiot käänteisessä järjestyksessä"

  $K(e, e)$ (1)

  $\forall x \forall y \forall z \forall v (K(x, y) \land L(y, v, z) \to K(c(v, x), z))$ (2)
- $L(y, v, z)$ = "lista z on lista y, jonka perään on liitetty alkio v"

  $\forall x L(e, x, c(x, e))$ (3)

  $\forall y \forall v \forall z \forall x (L(y, v, z) \to L(c(x, y), v, c(x, z)))$ (4)

Johdetaan lauseille klausuulimuodot:

(1) $\leadsto \{K(e, e)\}$

(2) $\leadsto \forall x \forall y \forall z \forall v (\neg K(x, y) \lor \neg L(y, v, z) \lor K(c(v, x), z))$
$\leadsto \{\neg K(x, y), \neg L(y, v, z), K(c(v, x), z)\}$

(3) $\leadsto \{L(e, x, c(x, e))\}$

(4) $\leadsto \forall y \forall v \forall z \forall x (\neg L(y, v, z) \lor L(c(x, y), v, c(x, z))$
$\leadsto \{\neg L(y, v, z), L(c(x, y), v, c(x, z))\}$

(5) Todistettavan lauseen negaatio $\neg K(c(1, c(2, e)), c(2, c(1, e)))$
$\leadsto \{\neg K(c(1, c(2, e)), c(2, c(1, e)))\}$

Haluamme siis osoittaa, että lista `[1,2]` on käännettynä `[2,1]`.

Resoluutiotodistus:

1. $\{\neg K(c(1, c(2, e)), c(2, c(1, e)))\}$ (P5)
2. $\{\neg K(x_1, y_1), \neg L(y_1, v_1, z_1), K(c(v_1, x_1), z_1)\}$ (P2)
3. $\{\neg K(c(2, e), y_1), \neg L(y_1, 1, c(2, c(1, e)))\}$ (1,2)
   MGU $\{v_1/1, x_1/c(2, e), z_1/c(2, (1, e))\}$
4. $\{\neg K(x_2, y_2), \neg L(y_2, v_2, z_2), K(c(v_2, x_2), z_2)\}$ (P2)
5. $\{\neg K(e, y_2), \neg L(y_2, 2, y_1), \neg L(y_1, 1, c(2, c(1, e)))\}$ (3,4)
   MGU $\{v_2/2, x_2/e, z_2/y_1\}$
6. $\{K(e, e)\}$ (P1)
7. $\{\neg L(e, 2, y_1), \neg L(y_1, 1, c(2, c(1, e)))\}$ (5,6) MGU $\{y_2/e\}$
8. $\{L(e, x_3, c(x_3, e))\}$ (P3)

9. $\{\neg L(c(2,e),1,c(2,c(1,e)))\}$ (7,8) MGU $\{x_3/2, y_1/c(2,e)\}$
10. $\{\neg L(y_4,v_4,z_4), L(c(x_4,y_4),v_4,c(x_4,z_4))\}$ (P4)
11. $\{\neg L(e,1,c(1,e))\}$ (9,10) MGU $\{x_4/2, y_4/e, v_4/1, z_4/c(1,e)\}$
12. $\{L(e,x_5,c(x_5,e)))\}$ (P3)
13. $\square$ (11,12) MGU $\{x_5/1\}$

Unifioijien kompositio:

$$\begin{aligned}\{\quad & v_1/1, x_1/c(2,e), z_1/c(2,c(1,e)),\\ & x_2/e, y_2/e, v_2/2, z_2/c(2,e),\\ & x_3/1,\\ & y_4/e, v_4/1, z_4/c(1,e), x_4/2,\\ & x_5/1 \quad \}\end{aligned}$$

Kerrossaturaatiostrategia

$$\begin{aligned} S_0 &= S \\ S_i &= \{C \mid C \text{ saadaan resoluutiolla klausuuleista} \\ &\qquad C_1 \in S_0 \cup \cdots \cup S_{i-1} \text{ ja } C_2 \in S_{i-1}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &= \{\{\neg I(x), E(x)\}, \{I(c)\}, \{K(c)\}, \{\neg E(y), \neg K(y)\}\} \\ S_1 &= \{\{E(c)\}, \{\neg E(c)\}, \{\neg I(x), \neg K(x)\}\} \\ S_2 &= \{\square, \{\neg I(c)\}, \{\neg K(c)\}\} \\ S_3 &= \{\square\} \\ S_4 &= \{\} \end{aligned}$$

Tukijoukkostrategia

Määritelmä. S:n osajoukko T on *tukijoukko* (set-of-support), jos $S - T$ on toteutuva.

Tukijoukkostrategiassa ei milloinkaan suoriteta resoluutiota joukon $S - T$ klausuuleille keskenään.

Ajatus: olettamusten joukko on toteutuva. T on johdettavan lauseen negaatiota vastaavien klausuulien joukko, $S - T$ olettamuksia vastaavat klausuulit.

Väite. Tukijoukkoresoluutio on täydellinen strategia.

Alla klausuuli 4 muodostaa tukijoukon.

1.	$\{\neg I(x), E(x)\}$	P
2.	$\{I(c)\}$	P
3.	$\{K(c)\}$	P
4.	$\{\neg E(y), \neg K(y)\}$	P $\{x/y\}$
5.	$\{\neg E(c)\}$	3, 4, MGU $\{y/c\}$
6.	$\{\neg I(c)\}$	1, 5, MGU $\{x/c\}$
7.	$\square$	2, 6, MGU ϵ

Lineaarinen resoluutio

Olkoon S klausuulijoukko. Alla oleva on johto lineaarisella resoluutiolla, jos C_0 on S:n klausuuli (mahdollisesti uudelleennimettynä) ja kukin B_i on joko S:n tai joukon $\{C_0, \dots, C_{i-1}\}$ klausuuli (mahdollisesti uudelleennimettynä).

$$\begin{tikzcd}
B_0 \arrow[dr] & B_1 \arrow[dr] & B_2 \arrow[dr] & & \dots\ B_n \arrow[dr] & \\
C_0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & C_3\ \dots & C_n \arrow[r] & \square
\end{tikzcd}$$

9 Tietämyksen esittämisestä

- Tietämystä voidaan esittää valitsemalla sopiva predikaattilogiikan lausejoukko $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$, joka muodostaa *eksplisiittisen* tietämyksen. Lausejoukon Σ loogiset seuraavuudet muodostavat *implisiittisen* tietämyksen: väittämät, jotka voidaan päätellä annetusta tietämyksestä.

Esimerkki.

$$\begin{aligned}\Sigma \quad = \quad & \{\forall x \forall y \forall z(\mathrm{johto}(x,y) \land \mathrm{jännite}(x,z) \rightarrow \mathrm{jännite}(y,z)),\\ & \mathrm{johto}(\mathrm{p1},\mathrm{p2}),\ \mathrm{johto}(\mathrm{p2},\mathrm{p3}),\ \mathrm{jännite}(\mathrm{p1},220)\ \}\end{aligned}$$

Nyt esim. lause $\mathrm{jännite}(\mathrm{p3}, 220)$ on implisiittistä tietämystä.

- Jokainen lausejoukko Σ määrittää joukon *malleja*, eli struktuureja $\mathcal{A}$, joissa lausejoukon kaikki lauseet ovat tosia.
- Lausejoukon Σ mallit puolestaan määräävät lausejoukon loogisten seurauksien joukon $\mathrm{Cn}(\Sigma) = \{\phi \mid \Sigma \models \phi\}$.
- Kaikki struktuurit ovat tyhjän lausejoukon $\emptyset$ malleja. Täten $\mathrm{Cn}(\emptyset)$ on itse asiassa pätevien lauseiden joukko.
- Enemmän lauseita $\Rightarrow$ vähemmän malleja $\Rightarrow$ enemmän loogisia seurauksia: siis $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \Rightarrow \mathrm{Cn}(\Sigma_1) \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma_2)$.
- *Tietämyksen esittäminen*: ongelmana rajoittaa mallien joukko siten, että saadaan halutut loogiset seuraukset.
- Jos lausejoukko tulee ristiriitaiseksi, sillä ei ole mallia ja kaikki lauseet ovat tällöin lausejoukon loogisia seurauksia.

Lisähuomioita loogisesta seuraavuudesta

- Jos $\Sigma \models \phi$, niin $\mathrm{Cn}(\Sigma) = \mathrm{Cn}(\Sigma \cup \{\phi\})$.

  Lausejoukon loogisia seurauksia ei siis kannata lisätä lausejoukkoon, koska lausejoukon mallit eivät näin muutu!
- Oletetaan, että $\Sigma \not\models \phi$ ja että Σ halutaan laajentaa lausejoukoksi Σ' siten, että $\Sigma' \models \phi$.

  Apuna voidaan käyttää vastamallia/vastamalleja $\mathcal{A}$, joille $\mathcal{A} \models \Sigma$ ja $\mathcal{A} \not\models \phi$: lausejoukkoon Σ lisättävän lauseen ψ tulisi sulkea pois vastamalli/vastamalleja $\mathcal{A}$, ts. $\mathcal{A} \not\models \Sigma \cup \{\psi\}$.

  Lause ϕ toteuttaa myös tämän vaatimuksen, mutta lausetta ϕ ei välttämättä haluta liittää eksplisiittiseen tietämykseen.

  Esim. $\Sigma = \{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))\}$, $\phi = Q(a)$ ja $\psi = P(a)$.

Esimerkki. Kieli $\mathcal{L}$: aviossa(x, y), nainen(x), mies(y)

U_i	aviossa$^{\mathcal{A}_i}$	nainen$^{\mathcal{A}_i}$	mies$^{\mathcal{A}_i}$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{1, 2, 3\}$	$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$	$\{1, 2\}$	$\{3\}$
$\{1, 2, 3\}$	$\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$	$\{1, 2, 5\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\Sigma_a = \left\{ \begin{array}{l} \neg\exists x(\text{mies}(x) \wedge \text{nainen}(x)) \\ \forall x(\neg(\text{aviossa}(x, x))) \\ \forall x\forall y(\text{aviossa}(x, y) \to \text{aviossa}(y, x)) \\ \forall x\forall y\forall z(\text{aviossa}(x, y) \wedge \text{aviossa}(x, z) \to y = z) \\ \forall x\forall y(\text{aviossa}(x, y) \to \\ \qquad ((\text{nainen}(x) \wedge \text{mies}(y)) \vee (\text{mies}(x) \wedge \text{nainen}(y)))) \end{array} \right\}$$

U_i	aviossa$^{\mathcal{A}_i}$	nainen$^{\mathcal{A}_i}$	mies$^{\mathcal{A}_i}$
$\{1, 2, 3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1, 2, 3\}$	$\{\langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$	$\{1\}$	$\{2, 3\}$
$\{1, 2, 3\}$	$\{\langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$	$\{1\}$	$\{2, 3\}$
$\{1, 2, 3\}$	$\emptyset$	$\{1, 2, 3\}$	$\emptyset$
$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Yksikäsitteisten nimien aksiomat ja sulkeuma-aksiomat

Kieli $\mathcal{L}$: vakiosymbolit aki, ann, eve ja predikaattisymboleita

Jokaisen vakiosymbolin viitattava eri alkioon (unique names):

$$\neg(\text{ann} = \text{eve}), \neg(\text{aki} = \text{eve}), \neg(\text{aki} = \text{ann})$$

Tarkasteltavassa joukossa ei muita kuin vakiosymbolien nimeämiä alkioita (domain closure):

$$\forall x(x = \text{aki} \vee x = \text{ann} \vee x = \text{eve})$$

U_i	$\mathrm{aki}^{\mathcal{A}_i}$	$\mathrm{ann}^{\mathcal{A}_i}$	$\mathrm{eve}^{\mathcal{A}_i}$
$\{1\}$	1	1	1
$\{1,2\}$	1	1	1
$\{1,2\}$	1	1	2
$\{1,2\}$	1	2	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{1,2,3\}$	1	1	1
$\{1,2,3\}$	1	1	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{1,2,3\}$	3	3	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{1,2,3,\ldots\}$	1	1	1

$$\neg(\mathrm{ann} = \mathrm{eve}), \neg(\mathrm{aki} = \mathrm{eve}), \neg(\mathrm{aki} = \mathrm{ann})$$

U_i	$\mathrm{aki}^{\mathcal{A}_i}$	$\mathrm{ann}^{\mathcal{A}_i}$	$\mathrm{eve}^{\mathcal{A}_i}$
$\{1,2,3\}$	1	2	3
$\{1,2,3\}$	1	3	2
$\{1,2,3\}$	2	1	3
$\{1,2,3\}$	2	3	1
$\{1,2,3\}$	3	1	2
$\{1,2,3\}$	3	2	1
$\{1,2,3,4\}$	1	2	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\forall x(x = \mathrm{aki} \lor x = \mathrm{ann} \lor x = \mathrm{eve})$$

U_i	$\mathrm{aki}^{\mathcal{A}_i}$	$\mathrm{ann}^{\mathcal{A}_i}$	$\mathrm{eve}^{\mathcal{A}_i}$
$\{1\}$	1	1	1
$\{1,2\}$	1	1	2
$\{1,2\}$	1	2	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{1,2,3\}$	1	2	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{1,2,3\}$	3	2	1

$$\Sigma_u = \left\{ \begin{array}{l} \neg(\mathrm{ann} = \mathrm{eve}), \neg(\mathrm{aki} = \mathrm{eve}), \neg(\mathrm{aki} = \mathrm{ann}) \\ \forall x(x = \mathrm{aki} \lor x = \mathrm{ann} \lor x = \mathrm{eve}) \end{array} \right\}$$

U_i	$\mathrm{aki}^{\mathcal{A}_i}$	$\mathrm{ann}^{\mathcal{A}_i}$	$\mathrm{eve}^{\mathcal{A}_i}$
$\{1,2,3\}$	1	2	3
$\{1,2,3\}$	1	3	2
$\{1,2,3\}$	2	1	3
$\{1,2,3\}$	2	3	1
$\{1,2,3\}$	3	1	2
$\{1,2,3\}$	3	2	1

Avioliittoesimerkki jatkuu...

$$\Sigma = \Sigma_a \cup \Sigma_u \cup \{\forall x(\text{nainen}(x) \vee \text{mies}(x))\}$$

U_i	$\text{aviossa}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{nainen}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{mies}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{aki}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{ann}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{eve}^{\mathcal{A}_i}$
$\{1,2,3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1,2,3\}$	1	2	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{1,2,3\}$	$\emptyset$	$\{1,2,3\}$	$\emptyset$	1	2	3
$\{1,2,3\}$	$\emptyset$	$\{2,3\}$	$\{1\}$	1	2	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\{1,2,3\}$	$\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$	$\{2,3\}$	$\{1\}$	1	2	3
$\{1,2,3\}$	$\{\langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$	$\{2,3\}$	$\{1\}$	1	2	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\begin{aligned}\Sigma \quad = \quad & \Sigma_a \cup \Sigma_u \cup \{\forall x(\text{nainen}(x) \vee \text{mies}(x)), \text{mies}(\text{aki}),\\ & \text{nainen}(\text{ann}), \text{nainen}(\text{eve})\}\end{aligned}$$

Lausejoukolla Σ on *olennaisesti* seuraavat mallit (struktuurit, joissa kaikki lausejoukon Σ lauseet ovat tosia):

U_i	$\text{aviossa}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{nainen}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{mies}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{aki}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{ann}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{eve}^{\mathcal{A}_i}$
$\{1,2,3\}$	$\emptyset$	$\{2,3\}$	$\{1\}$	1	2	3
$\{1,2,3\}$	$\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$	$\{2,3\}$	$\{1\}$	1	2	3
$\{1,2,3\}$	$\{\langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}$	$\{2,3\}$	$\{1\}$	1	2	3

1. Onko $\Sigma \cup \{\text{aviossa}(\text{aki}, \text{ann})\} \models \text{aviossa}(\text{ann}, \text{aki})$?
2. Onko $\Sigma \cup \{\text{aviossa}(\text{aki}, \text{ann})\} \models \neg\text{aviossa}(\text{eve}, \text{aki})$?
3. Onko $\Sigma \models \neg\text{aviossa}(\text{eve}, \text{ann})$?
4. Onko $\Sigma \models \neg\text{aviossa}(\text{aki}, \text{ann})$?

Lisää tietämyksen esittämisestä...

Kieli $\mathcal{L}$: vakiot aki, ann, eve ja predikaattisymboli pitää

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \forall x(x = \text{aki} \vee x = \text{ann} \vee x = \text{eve}) \\ \neg(\text{aki} = \text{ann}), \neg(\text{aki} = \text{eve}), \neg(\text{ann} = \text{eve}) \end{array} \right\}$$

i	U_i	$\text{pitää}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{aki}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{ann}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{eve}^{\mathcal{A}_i}$
0	$\{1,2,3\}$	$\emptyset$	1	2	3
1	$\{1,2,3\}$	$\{\langle 1,1\rangle\}$	1	2	3
2	$\{1,2,3\}$	$\{\langle 1,2\rangle\}$	1	2	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
511	$\{1,2,3\}$	$\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \ldots\}$ $= U_{511} \times U_{511}$	1	2	3

$$\Sigma' = \Sigma \cup \{\text{pitää}(\text{aki}, \text{ann}), \text{pitää}(\text{eve}, \text{eve})\}$$

i	U_i	$\text{pitää}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{aki}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{ann}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{eve}^{\mathcal{A}_i}$
2	$\{1,2,3\}$	$\{\langle 1,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$	1	2	3
3	$\{1,2,3\}$	$\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$	1	2	3
4	$\{1,2,3\}$	$\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$	1	2	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
511	$\{1,2,3\}$	$U_{511} \times U_{511}$	1	2	3

Onko $\Sigma' \models \neg\text{pitää}(\text{aki}, \text{eve})$?

Haluttu lausejoukko on itse asiassa

$$\begin{aligned}\Gamma_2 \quad = \quad & \{\text{pitää}(\text{aki}, \text{ann}), \text{pitää}(\text{eve}, \text{eve}),\\ & \neg\text{pitää}(\text{aki}, \text{aki}), \neg\text{pitää}(\text{aki}, \text{eve}), \neg\text{pitää}(\text{ann}, \text{aki}),\\ & \neg\text{pitää}(\text{ann}, \text{ann}), \neg\text{pitää}(\text{ann}, \text{eve}), \neg\text{pitää}(\text{eve}, \text{aki}),\\ & \neg\text{pitää}(\text{eve}, \text{ann})\}\end{aligned}$$

"Negatiivista tietoa" saattaa olla PALJON enemmän kuin "positiivista" ...

Yksi mahdollisuus on täydentää predikaatin pitää määritelmä muodoltaan ekvivalenssiksi.

Predikaatin määritelmän täydentäminen ekvivalenssiksi

Lausejoukko $\Gamma = \{\text{pitää}(\text{aki}, \text{ann}), \text{pitää}(\text{eve}, \text{eve})\}$ voidaan antaa identiteettipredikaattia käyttäen myös joukkona

$$\begin{aligned}&\{\forall x \forall y(((x = \text{aki}) \wedge (y = \text{ann})) \vee\\ &\qquad ((x = \text{eve}) \wedge (y = \text{eve})) \rightarrow \text{pitää}(x, y))\}\end{aligned}$$

Rajoitetaan pitäminen siten, ettei pitämistä tapahdu ellei Γ:ssa asiasta ole erikseen mainittu:

$$\begin{aligned}\Gamma' = &\{\forall x \forall y(((x = \text{aki}) \wedge (y = \text{ann})) \vee\\ &\qquad ((x = \text{eve}) \wedge (y = \text{eve})) \leftrightarrow \text{pitää}(x, y))\}\end{aligned}$$

Lausejoukon

$$\Sigma'' = \Sigma \cup \Gamma'$$

kaikki struktuurit ovat sellaisia, että vain aki pitää annista ja eve pitää itsestään:

i	U_i	$\text{pitää}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{aki}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{ann}^{\mathcal{A}_i}$	$\text{eve}^{\mathcal{A}_i}$
2	$\{1,2,3\}$	$\{\langle 1,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$	1	2	3

Onko $\Sigma'' \models \neg\text{pitää}(\text{aki}, \text{eve})$?