Tik-79.144 **Syksy 2000**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 9
Ratkaisut

1. Sovelletaan unifikaatioalgoritmia vaiheittain:

a) $\sigma_0 = \epsilon$ (tyhjä substituutio)
$S_0 = \{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
$D(S_0) = \{x, f(y)\}$
$\sigma_1 = \{x/f(y)\}$
$\sigma_0\sigma_1 = \{x/f(y)\}$
$S_1 = \{P(f(y), g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
$D(S_1) = \{y, f(z)\}$
$\sigma_2 = \{y/f(z)\}$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_2 = \{x/f(f(z)), y/f(z)\}$
$S_2 = \{P(f(f(z)), g(f(z)), f(a)), P(f(f(z)), g(f(z)), z)\}$
$D(S_2) = \{f(a), z\}$
$\sigma_3 = \{z/f(a)\}$
$\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \{x/f(f(f(a))), y/f(f(a)), z/f(a)\}$
$S_3 = \{P(f(f(f(a))), g(f(f(a))), f(a))\}$
Unifiointi onnistui, yleisin unifioija on $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

b) $\sigma_0 = \epsilon$
$S_0 = \{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
$D(S_0) = \{x, a, y\}$
$\sigma_1 = \{x/a\}$
$S_1 = \{P(a, f(a), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
$D(S_1) = \{a, y\}$
$\sigma_2 = \{y/a\}$
$S_2 = \{P(a, f(a), g(a)), P(a, f(g(a)), g(a))\}$
$D(S_2) = \{a, g(a)\}$
Termit a ja $g(a)$ eivät unifioidu; unifiointi ei siis onnistu.

c) $\sigma_0 = \epsilon$
$S_0 = \{P(x, f(x, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
$D(S_0) = \{x, y, b\}$
$\sigma_1 = \{x/b\}$
$S_1 = \{P(b, f(b, y)), P(y, f(y, a)), P(b, f(b, a))\}$
$D(S_1) = \{b, y\}$
$\sigma_2 = \{y/b\}$
$S_2 = \{P(b, f(b, b)), P(b, f(b, a))\}$

$D(S_2) = \{b, a\}$
Termit b ja a eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

d) $\sigma_0 = \epsilon$
$S_0 = \{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$
$D(S_0) = \{f(a), y, x\}$
$\sigma_1 = \{y/f(a)\}$
$S_1 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(x, f(a), f(z))\}$
$D(S_1) = \{f(a), x\}$
$\sigma_2 = \{x/f(a)\}$
$S_2 = \{P(f(a), f(a), z), P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(z))\}$
$D(S_2) = \{z, b, f(z)\}$ (z:aa ei voi korvata $f(z)$:lla)
$\sigma_3 = \{z/b\}$
$S_3 = \{P(f(a), f(a), b), P(f(a), f(a), f(b))\}$
$D(S_3) = \{b, f(b)\}$
Termit b ja $f(b)$ eivät unifioidu; unifiointi ei onnistu.

2. Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja:

$$T(x, y) = \text{“tiili } x \text{ on tiilen } y \text{ päällä” ja}$$
$$P(x) = \text{“tiili } x \text{ on pöydällä”.}$$

Premissijoukko on formalisoituna seuraavanlainen:

$$\{\forall x\,(\exists y\,T(x,y) \to \neg P(x)),\ \forall x\,(P(x) \lor \exists y\,T(x,y)),$$
$$\forall x \forall y\,(\exists z\,T(y,z) \to \neg T(x,y))\}$$

Halutun johtopäätöksen negaatio on

$$\neg \forall x \forall y\,(T(x,y) \to P(y))$$

Muuntamalla kaavat klausuulimuotoon saadaan näistä klausuulijoukko

$$\{\{\neg T(x_1, y_1), \neg P(x_1)\},\ \{P(x_2), T(x_2, g(x_2))\},\ \{\neg T(y_3, z_3), \neg T(x_3, y_3)\},$$
$$\{T(c, d)\},\ \{\neg P(d)\}\}$$

missä g on Skolem-funktio sekä c ja d Skolem-vakioita. Muuttujat on nimetty uudestaan, sillä resoluutiotodistuksen tekeminen vaatii sen. Tosin tämän nimenomaisen todistuksen saisi tehtyä myös ilman uudelleennimeämistä, mutta se on hyvä tehdä aina[1].

[1]Esimerkiksi lauseista $\forall x P(x)$ ja $\forall x \neg P(f(x))$ ei saa johdettua ristiriitaa ilman uudelleennimeämistä, sillä x ei unifioidu $f(x)$:n kanssa.

Yritetään sitten johtaa klausuulijoukosta binääriresoluutiolla tyhjä klausuuli, joka edustaa ristiriitaa. Klausuuleista $\{P(x_1), T(x_1, g(x_1))\}$ ja $\{\neg P(d)\}$ saadaan binääriresoluutiolla

$$\{T(d, g(d))\} \qquad \text{(substituutio } \{x_1/d\})$$

Vastaavasti, klausuuleista $\{\neg T(y_3, z_3), \neg T(x_3, y_3)\}$ ja $\{T(c, d)\}$ saadaan binääriresoluutiolla

$$\{\neg T(d, z_4)\} \qquad \text{(substituutio } \{x_3/c, y_3/d, z/z_4\})$$

ja klausuuleista $\{T(d, g(d))\}$ ja $\{\neg T(d, z_4)\}$ tyhjä klausuuli (substituutio $\{z_4/g(d)\}$). Täten klausuulijoukko on toteutumaton ja johtopäätös seuraa loogisesti premisseistä.

3. Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja: $P(x)$ = "x on parturi" ja $A(x, y)$ = "x ajaa y:n parran".

a) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(\neg A(y, y) \rightarrow A(x, y)))$,
b) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(A(y, y) \rightarrow \neg A(x, y)))$.

Muodostetaan klausuulit:

a) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(\neg A(y, y) \rightarrow A(x, y)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(A(y, y) \vee A(x, y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee A(y, y) \vee A(x, y))$
$\neg P(x) \vee A(y, y) \vee A(x, y)$
$\{\neg P(x_1),\ A(y_1, y_1),\ A(x_1, y_1)\}$

b) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(A(y, y) \rightarrow \neg A(x, y)))$
$\forall x(\neg P(x) \vee \forall y(\neg A(y, y) \vee \neg A(x, y)))$
$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee \neg A(y, y) \vee \neg A(x, y))$
$\neg P(x) \vee \neg A(y, y) \vee \neg A(x, y)$
$\{\neg P(x_2),\ \neg A(y_2, y_2),\ \neg A(x_2, y_2)\}$

Halutaan todistaa $\neg \exists x P(x)$ ja siksi muodostetaan lauseen negaatio $\exists x P(x)$. Tämä lause muutetaan klausuulimuotoon $\{P(a)\}$.

Klausuuleista

$$\{\neg P(x_1),\ A(y_1, y_1),\ A(x_1, y_1)\} \qquad \text{ja} \qquad \{\neg P(x_2),\ \neg A(y_2, y_2),\ \neg A(x_2, y_2)\}$$

saadan

$$\{\neg P(x_3)\} \qquad \text{(substituutio } \{x_1/x_3, x_2/x_3, y_1/x_3, y_2/x_3\})$$

Klausuuleista $\{P(a)\}$ ja $\{\neg P(x_3)\}$ saadaan tyhjä klausuuli (substituutio $\{x_3/a\}$). Täten klausuulijoukko on toteutumaton ja $\neg \exists x P(x)$ seuraa loogisesti premisseistä.