Tik-79.144 **Syksy 2000**

Logiikka tietotekniikassa: perusteet

Laskuharjoitus 8

Ratkaisut

1. a) Lause $\neg\exists x((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$:
Eliminoidaan implikaatiot: $\neg\exists x((\neg P(x) \vee P(a)) \wedge (\neg P(x) \vee P(b)))$
Viedään $\neg$ kvanttorin $\exists x$ sisään:
$\forall x \neg((\neg P(x) \vee P(a)) \wedge (\neg P(x) \vee P(b)))$
Viedään negaatiot lausekkeiden sisään:
$\forall x((P(x) \wedge \neg P(a)) \vee (P(x) \wedge \neg P(b)))$
Tuodaan $P(x)$ ulos: $\forall x(P(x) \wedge (\neg P(a) \vee \neg P(b)))$
Jätetään universaalikavanttorit pois: $P(x) \wedge (\neg P(a) \vee \neg P(b))$
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{P(x)\},\ \{\neg P(a),\ \neg P(b)\}\}$

b) Lause $\forall y \exists x P(x, y)$:
Skolemointi: $\forall y P(f(y), y)$
Jätetään universaalikavanttorit pois: $P(f(y), y)$
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{P(f(y), y)\}\}$

c) Lause $\neg\forall y \exists x G(x, y)$:
Viedään $\neg$ kvanttorin $\forall y$ sisään: $\exists y \neg\exists x G(x, y)$
Viedään $\neg$ kvanttorin $\exists x$ sisään: $\exists y \forall x \neg G(x, y)$
Skolemointi: $\forall x \neg G(x, c)$
Jätetään universaalikavanttorit pois: $\neg G(x, c)$
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{\neg G(x, c)\}\}$

d) Lause $\exists x \forall y \exists z(P(x, z) \vee P(z, y) \to G(x, y))$:
Eliminoidaan implikaatio: $\exists x \forall y \exists z(\neg(P(x, z) \vee P(z, y)) \vee G(x, y))$
Viedään negaatiot lausekkeen sisään:
$\exists x \forall y \exists z((\neg P(x, z) \wedge \neg P(z, y)) \vee G(x, y))$
Viedään $G(x, y)$ lausekkeen sisään:
$\exists x \forall y \exists z((\neg P(x, z) \vee G(x, y)) \wedge (\neg P(z, y) \vee G(x, y)))$
Skolemointi: $\forall y \exists z((\neg P(c, z) \vee G(c, y)) \wedge (\neg P(z, y) \vee G(c, y)))$
Skolemointi: $\forall y((\neg P(c, f(y)) \vee G(c, y)) \wedge (\neg P(f(y), y) \vee G(c, y)))$
Jätetään universaalikvanttorit pois:
$(\neg P(c, f(y)) \vee G(c, y)) \wedge (\neg P(f(y), y) \vee G(c, y))$
Muodostetaan klausuuliesitys:
$\{\{\neg P(c, f(y)),\ G(c, y)\},\ \{\neg P(f(y), y),\ G(c, y)\}\}$

2. Herbrand-universumi U muodostuu termeistä, jotka ovat konstruoitavissa klausuulijoukossa esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista. Jos klausuulijoukossa ei ole vakiosymboleita, universumiin otetaan jokin vakiosymboli, esimerkiksi a (näin tapahtuu kohdissa (b), (d) ja (f)). Herbrand-kanta B puolestaan muodostuu atomisista lauseista, jotka ovat konstruoitavissa klausuulijoukossa esiintyvistä predikaattisymboleista käyttämällä argumentteina Herbrand-universumin U termejä.

a) $U = \{c\}$, $B = \{G(c, c)\}$.

b) $U = \{a, f(a), f(f(a)), ...\}$, $B = \{P(e_1, e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\}$.

c) $U = \{a, b\}$, $B = \{P(a), P(b)\}$.

d) $U = \{a\}$, $B = \{P(a, a), G(a, a)\}$.

e) $U = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), ...\}$,
$B = \{P(e_1, e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\} \cup \{Q(e_1, e_2) \mid e_1 \in U, e_2 \in U\}$.

f) $U = \{a, f(a, a), f(a, f(a, a)), f(f(a, a), a), f(f(a, a), f(a, a)), ...\}$,
$B = \{P(e) \mid e \in U\} \cup \{Q(e) \mid e \in U\}$.

3. Muunnetaan kaavajoukko

$$\{\forall x P(x, a, x),\ \neg \exists x \exists y \exists z (P(x, y, z) \wedge \neg P(x, f(y), f(z)))\}$$

klausuulimuotoon. Kaava

$$\forall x P(x, a, x)$$

on suoraan skolem-normaalimuodossa, joten klausuuliesitys on

$$\{P(x, a, x)\}$$

Kaava

$$\neg \exists x \exists y \exists z (P(x, y, z) \wedge \neg P(x, f(y), f(z)))$$

saadaan skolem-normaalimuotoon viemällä negaatio eksistenssikvanttoreiden sekä edelleen kaavan

$$(P(x, y, z) \wedge \neg P(x, f(y), f(z)))$$

sisälle. Lopputulokseksi saadaan kaava

$$\forall x \forall y \forall z (\neg P(x, y, z) \vee P(x, f(y), f(z)))$$

ja siten vastaava klausuuliesitys on

$$\{\neg P(x, y, z),\ P(x, f(y), f(z))\}$$

Täten koko kaavajoukkoa vastaava klausuulijoukko on

$$\{\{P(x,a,x)\},\ \{\neg P(x,y,z),\ P(x,f(y),f(z))\}\}$$

Määritellään seuraavaksi lyhennysmerkintä $f^i(a)$ kaikille $i \in \mathbb{N}$ (luonnolliset luvut): $f^0(a)$ tarkoittaa termiä a, $f^1(a)$ tarkoittaa termiä $f(a)$, $f^2(a)$ tarkoittaa termiä $f(f(a))$, jne. (Intuitiivisemmin sanottuna, $f^i(a)$ tarkoittaa siis termiä, joka on muodostettu soveltamalla i kertaa funktiota f vakioon a.) Nyt klausuulijoukon Herbrand-universumi

$$U = \{a, f(a), f(f(a)), ...\} = \{f^i(a) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

ja Herbrand-kanta

$$B = \{P(f^i(a), f^j(a), f^k(a)) \mid i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$$

Konstruoidaan nyt klausuulijoukolle Herbrand-malli ts. B:n osajoukko siten, että joukon kaikki klausuulit toteutuvat — sidottiin klausuuleissa esiintyvät muuttujat, jotka ovat universaalisti kvantifioituja, sitten mihin universumin U elementtiin hyvänsä. Tehdään mallista M samalla minimaalinen, ts. asetetaan todeksi vain ne atomiset lauseet, jotka ovat välttämättömiä klausuulijoukon toteutumisen kannalta. Jotta klausuuli $\{P(x,a,x)\}$ toteutuisi (kaikilla $x \in U$) on mallissa M asetettava atomiset lauseet $P(f^i(a), a, f^i(a))$ $(i \in \mathbb{N})$ todeksi. Kun nämä lauseet asetetaan todeksi, niiden negaatiot ovat epätosia. Näin ollen, jotta klausuuli $\{\neg P(x,y,z), P(x,f(y),f(z))\}$ toteutuisi mallissa M, kun $x = f^i(a), y = a, z = f^i(a)$ on myös lauseet $P(f^i(a), f(a), f^{i+1}(a))$ $(i \in \mathbb{N})$ asetettava todeksi mallissa M. Nyt lauseet $\neg P(f^i(a), f(a), f^{i+1}(a))$ $(i \in \mathbb{N})$ ovat epätosia M:ssä. Jatketaan päättelyä samaan tapaan. Jotta klausuuli $\{\neg P(x,y,z), P(x,f(y),f(z))\}$ toteutuisi mallissa M, kun $x = f^i(a), y = f^1(a), z = f^{i+1}(a)$ on lauseiden $P(f^i(a), f^2(a), f^{i+2}(a))$ oltava tosia mallissa M. Suorittamalla yhteensä j kappaletta vastaavia päättelyaskelia, on mallissa M asettava todeksi kaikki atomiset lauseet, jotka ovat muotoa $P(f^i(a), f^j(a), f^{i+j}(a))$ $(i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N})$. Nyt kaikki klausuulit toteutuvat (kaikilla muuttujien arvoilla) ja täten hakemamme minimaalinen Herbrand-malli on $\{P(f^i(a), f^j(a), f^{i+j}(a)) \mid i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$ (aikaisemmat tapaukset sisältyvät tähän lausekkeeseen).

Huomaa, että tulkittaessa a luonnolliseksi luvuksi 0 ja f seuraajafunktioksi $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : s(x) = x + 1$, on predikaatin P tulkintana (M:n mukaisesti) kolmipaikkainen predikaatti, joka on tosi täsmälleen silloin, kun kolmas argumentti on kahden ensimmäisen summa. Alkuperäinen kaavajoukko siis määrittelee luonnollisten lukujen yhteenlaskun (kyseisellä minimaalisella tulkinnalla).