Tik-79.144 **Syksy 2000**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 7
Ratkaisut

1. Merkitään kaupunkeja vakiosymboleilla h (Helsinki), l (Lontoo), r (Rovaniemi), n (New York), pa (Pariisi), pi (Pietari) ja b (Berliini). Muodostetaan sitten tietokanta kaupunkien välisistä lennoista:

$$\{L(h,l), L(h,r), L(h,n), L(n,pa), L(pi,b)\}$$

Todistetaan semanttisella taululla, että tietokannan ja aksiomien

$$\forall x \forall y (L(x,y) \rightarrow L(y,x))$$
$$\forall x \forall y (L(x,y) \rightarrow Y(x,y))$$
$$\forall x \forall y \forall z (Y(x,y) \wedge L(y,z) \rightarrow Y(x,z))$$

perusteella Rovaniemeltä on yhteys Pariisiin (formalisoituna $Y(r,pa)$).

Huomaa, että aksiomissa esiintyvät universaalikvanttorit on instantioitu aina kerralla (yhdellä askeleella). Tämän taulutodistuksen "idea" löytyy haarasta, joka etenee ylhäältä alas. Siinä osoitetaan, että

(i) Rovaniemeltä on lento Helsinkiin,

(ii) Rovaniemeltä on yhteys Helsinkiin,

(iii) Rovaniemeltä on yhteys New Yorkiin ja

(iv) Rovaniemeltä on yhteys Pariisiin.

Ilman tätä strategiaa taulun haarojen sulkeminen on huomattavasti työläämpää.

$T(L(h,l))$
$T(L(h,r))$
$T(L(h,n))$
$T(L(n,pa))$
$T(L(pi,b))$
$T(\forall x \forall y(L(x,y) \to L(y,x)))$
$T(\forall x \forall y(L(x,y) \to Y(x,y)))$
$T(\forall x \forall y \forall z(Y(x,y) \wedge L(y,z) \to Y(x,z)))$
$F(Y(r,pa))$

$$
\begin{array}{ccc}
 & & T(L(h,r) \to L(r,h)) \\
 & F(L(h,r)) & T(L(r,h)) \\
 & \otimes & \\
 & & T(L(r,h) \to Y(r,h)) \\
 & F(L(r,h)) & T(Y(r,h)) \\
 & \otimes & \\
 & & T(Y(r,h) \wedge L(h,n) \to Y(r,n)) \\
 & F(Y(r,h) \wedge L(h,n)) & T(Y(r,n)) \\
F(Y(r,h)) & F(L(h,n)) & T(Y(r,n) \wedge L(n,pa) \to Y(r,pa)) \\
\otimes & \otimes & \\
 & F(Y(r,n) \wedge L(n,pa)) & T(Y(r,pa)) \\
 & & \otimes \\
F(Y(r,n)) & F(L(n,pa)) & \\
\otimes & \otimes &
\end{array}
$$

2. Olkoon predikaatit $G(x)$ (x on syyllinen), $L(x)$ (x on valehtelija), $A(x)$ (x on syytetty) ja $W(x)$ (x on todistaja). Premissit ovat nyt $\forall x(G(x) \to L(x))$, $\exists x(A(x) \wedge W(x))$ ja $\forall x(W(x) \to \neg L(x))$. Haluttu johtopäätös on $\neg\forall x(A(x) \to G(x))$. Taulutodistus on seuraavanalainen.

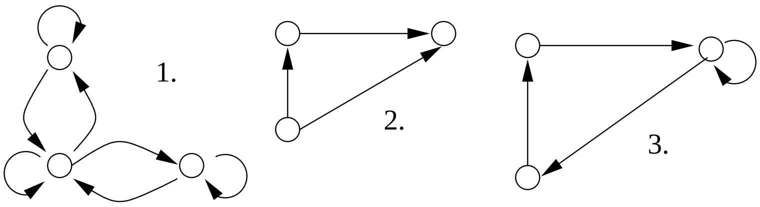
$$
\begin{array}{c}
T(\forall x(G(x) \to L(x))) \\
T(\exists x(A(x) \wedge W(x))) \\
T(\forall x(W(x) \to \neg L(x))) \\
F(\neg\forall x(A(x) \to G(x))) \\
| \\
T(\forall x(A(x) \to G(x))) \\
| \\
T(A(a) \wedge W(a)) \\
| \\
T(A(a)) \\
T(W(a)) \\
| \\
T(A(a) \to G(a))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
F(A(a)) & T(G(a)) \\
\otimes & | \\
 & T(W(a) \to \neg L(a))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
F(W(a)) & T(\neg L(a)) \\
\otimes & | \\
 & F(L(a)) \\
 & | \\
 & T(G(a) \to L(a))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
F(G(a)) & T(L(a)) \\
\otimes & \otimes
\end{array}
$$

3. Allaolevat kolme graafia pyrkivät selventämään eri relaatioiden ominaisuuksia. Tässä solmut ovat struktuurin alkioita, ja solmuja yhdistää kaari, mikäli $R(x, y)$ on tosi, kun $x \in A, y \in A$. Loogisia rakenteita havainnollistetaan aina silloin tällöin niitä vastaavien graafien avulla.



Refleksiivisyys ($\forall x R(x,x)$) tarkoittaa sitä, että graafin kaikista solmuista on kaari takaisin itseensä, ja irrefleksiivisyys ($\forall x \neg R(x,x)$) vastaavasti sitä, että yhdessäkään solmussa ei ole itseään osoitavaa kaarta. Graafeista ensimmäinen on refleksiivinen, toinen irrefleksiivinen ja kolmas ei ole kumpaakaan.

Symmetrisyys ($\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$) tarkoittaa sitä, että aina mikäli solmusta x on kaari solmuun y, graafissa on myös kaari y:stä x:ään. Asymmetrisellä ($\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$) graafilla ei ole yhtään paluukaarta. Kuvan graafeista 1. on symmetrinen, 2. asymmetrinen ja 3. ei kumpaakaan.

Transitiivisessa graafissa ($\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$) pätee, että mikäli solmusta x päästään kaaria seuraamalla (mahdollisesti muiden solmujen kautta) solmuun y, pääsee solmusta x myös suoraan solmuun y. Kuvan graafeista ainoastaan keskimmäinen on transitiivinen.

Graafin sarjallisuus ($\forall x \exists y R(x,y)$) tarkoittaa sitä, että kaikista solmuista lähtee ainakin yksi kaari. Kuvan graafeista ensimmäinen ja viimeinen ovat sarjallisia.

Ominaisuuksien ihmisten joukossa tapahtuvaa tarkastelua varten määritellään seuraavat relaatiot: $T(x,y)$ (x tuntee y:n), $N(x,y)$ (x on naimisissa y:n kanssa), $V(x,y)$ (y on x:n vanhempi) ja $E(x,y)$ (y on x:n esi-isä). Nämä relaatiot toteuttavat ominaisuuksia seuraavan taulukon mukaisesti.

Relaatio	refl.	irrefl.	symm.	asymm.	trans.	sarj.
tuttu	*		*			*
aviopuoliso		*	*			
vanhempi		*		*		*
esi-isä		*		*	*	*

Koska ihminen tuntee itsensä, ja tutut tuntevat toisensa, on $T(x,y)$ refleksiivinen, symmetrinen ja sarjallinen. Aviopuolisot ovat naimisissa toistensa kanssa, eikä kukaan voi olla naimisissa itsensä kanssa, joten

$N(x, y)$ on irrefleksiivinen ja symmetrinen. Vanhemmuus on irrefleksiivinen, asymmetrinen (kukaan ei voi olla oma isovanhempansa) ja sarjallinen (kaikilla on vanhemmat). Esi-isä –relaatio on kuten vanhemmuus, mutta sen lisäksi myös transitiivinen, koska jos Kalle on Pekan esi-isä, ja Pekka Juhan, niin Kalle on myös Juhan esi-isä.