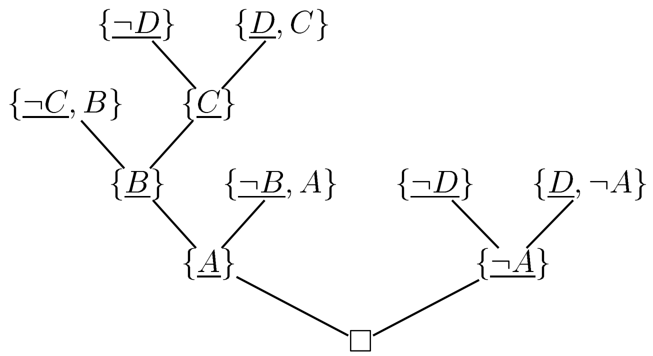
Tik-79.144 **Syksy 2000**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 5
Ratkaisut

1. Muodostetaan ensin lausejoukon klausuuliesitys:

Lause	Klausuulit
$\neg A \to \neg B$	$\{A, \neg B\}$
$\neg B \to \neg C$	$\{B, \neg C\}$
$(C \to A) \to D \equiv \neg(\neg C \lor A) \lor D$ $\equiv (C \land \neg A) \lor D$ $\equiv (C \lor D) \land (\neg A \lor D)$	$\{C, D\}, \{\neg A, D\}$
$\neg D$	$\{\neg D\}$

Tehdään resoluutiotodistus (kullakin askella käytettävät literaalit on alleviivattu):



Koska klausuulijoukosta saatiin johdettua ristiriita, ei voi olla niin, että lausejoukon lauseet olisivat kaikki tosia, mutta haluttu johtopäätös olisi epätosi.

2. Muunnetaan lauseet konjuntiiviseen normaalimuotoon ja klausuuleiksi.

Taulukossa on viimeisenä todistettavan kaavan negaatio $P1 \wedge P2$.

Lause		Klausuulit
$Pi \vee Ki \vee Vi$		$\{Pi, Ki, Vi\}$
$Pi \to \neg Ki \wedge \neg Vi$	$\equiv \neg Pi \vee (\neg Ki \wedge \neg Vi)$	
	$\equiv (\neg Pi \vee \neg Ki) \wedge (\neg Pi \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Pi, \neg Vi\}$
$Ki \to \neg Pi \wedge \neg Vi$	$\equiv (\neg Ki \vee \neg Pi) \wedge (\neg Ki \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$Vi \to \neg Pi \wedge \neg Ki$	$\equiv (\neg Vi \vee \neg Pi) \wedge (\neg Vi \vee \neg Ki)$	$\{\neg Pi, \neg Vi\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$\neg(V1 \wedge V2)$	$\equiv \neg V1 \vee \neg V2$	$\{\neg V1, \neg V2\}$
$P1 \to (K2 \vee V2)$	$\equiv \neg P1 \vee K2 \vee V2$	$\{\neg P1, K2, V2\}$
$P2 \to (K1 \vee V1)$	$\equiv \neg P2 \vee K1 \vee V1$	$\{\neg P2, K1, V1\}$
$P1 \wedge P2$		$\{P1\}, \{P2\}$

Osoitamme seuraavaksi taulukossa annettujen klausuulien joukon toteutumattomaksi (tyhjä klausuuli $\{\}$ tarkoittaa ristiriitaa), jolloin lause $\neg(P1 \wedge P2)$ on johdettavissa muista klausuuleista:

$$\{\neg P1, K2, V2\} \quad \{P1\}$$
$$\{K2, V2\} \quad \{\neg P2, \neg K2\}$$
$$\{\neg P2, V2\} \quad \{\neg P2, \neg V2\}$$
$$\{\neg P2\} \quad \{P2\}$$
$$\{\}$$

3. Mallinnetaan kemialliset reaktiot implikaatioiksi, jotka muutetaan sitten klausuulimuotoon. Tuloksena saadaan klausuulit:

(1)

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{MgO} + \mathrm{H_2} \to \mathrm{Mg} + \mathrm{H_2O} \\
\Longrightarrow & \mathrm{MgO} \wedge \mathrm{H_2} \to \mathrm{Mg} \wedge \mathrm{H_2O} \\
\Longrightarrow & \neg\mathrm{MgO} \vee \neg\mathrm{H_2} \vee (\mathrm{Mg} \wedge \mathrm{H_2O}) \\
\Longrightarrow & (\neg\mathrm{MgO} \vee \neg\mathrm{H_2} \vee \mathrm{Mg}) \wedge (\neg\mathrm{MgO} \vee \neg\mathrm{H_2} \vee \mathrm{H_2O})
\end{aligned}
$$

Reaktiosta syntyi siis kaksi klausuulia: $\{\neg\mathrm{MgO}, \neg\mathrm{H_2}, \mathrm{Mg}\}$ sekä $\{\neg\mathrm{MgO}, \neg\mathrm{H_2}, \mathrm{H_2O}\}$.

(2)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{C} + \mathrm{O_2} \rightarrow \mathrm{CO_2} \\
\Longrightarrow &\mathrm{C} \land \mathrm{O_2} \rightarrow \mathrm{CO_2} \\
\Longrightarrow &\neg\mathrm{C} \lor \neg\mathrm{O_2} \lor \mathrm{CO_2} \\
\Longrightarrow &\{\neg\mathrm{C}, \neg\mathrm{O_2}, \mathrm{CO_2}\}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O} \rightarrow \mathrm{H_2CO_3} \\
\Longrightarrow &\mathrm{CO_2} \land \mathrm{H_2O} \rightarrow \mathrm{H_2CO_3} \\
\Longrightarrow &\neg\mathrm{CO_2} \lor \neg\mathrm{H_2O} \lor \mathrm{H_2CO_3} \\
\Longrightarrow &\{\neg\mathrm{CO_2}, \neg\mathrm{H_2O}, \mathrm{H_2CO_3}\}
\end{aligned}$$

Lisäksi lähtöaineista saadaan neljän klausuulin joukko:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{MgO} \land \mathrm{H_2} \land \mathrm{O_2} \land \mathrm{C} \\
\Longrightarrow &\{\mathrm{MgO}\}, \{\mathrm{H_2}\}, \{\mathrm{O_2}\}\{\mathrm{C}\}
\end{aligned}$$

Merkitään ylläolevaa klausuuliijoukkoa Σ. Nyt halutaan todistaa, että $\Sigma \models \mathrm{H_2CO_3}$. Todistus tehdään osoittamalla, että $\Sigma \cup \{\neg\mathrm{H_2CO_3}\}$ on toteutumaton:

$$\{\neg\mathrm{H_2CO_3}\} \qquad \{\neg\mathrm{CO_2}, \neg\mathrm{H_2O}, \mathrm{H_2CO_3}\}$$

$$\{\neg\mathrm{C}, \neg\mathrm{O_2}, \mathrm{CO2}\} \qquad \{\neg\mathrm{CO_2}, \neg\mathrm{H_2O}\}$$

$$\{\neg\mathrm{H_2O}, \neg\mathrm{C}, \neg\mathrm{O_2}\} \qquad \{\mathrm{C}\}$$

$$\{\mathrm{O_2}\} \qquad \{\neg\mathrm{H_2O}, \neg\mathrm{O_2}\}$$

$$\{\neg\mathrm{H_2O}\} \qquad \{\neg\mathrm{MgO}, \neg\mathrm{H_2}, H_2O\}$$

$$\{\neg\mathrm{MgO}, \neg\mathrm{H_2}\} \qquad \{\mathrm{H_2}\}$$

$$\{\neg\mathrm{MgO}\} \qquad \{\mathrm{MgO}\}$$

$$\Box$$