Tik-79.144 **Syksy 2000**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 4
Ratkaisut

1. a) Poistetaan lauseesta ensin ekvivalenssit ja implikaatiot ja viedään negaatiot atomisten lauseiden eteen (De Morganin säännöt ja kaksoisnegaation eliminointisääntö).

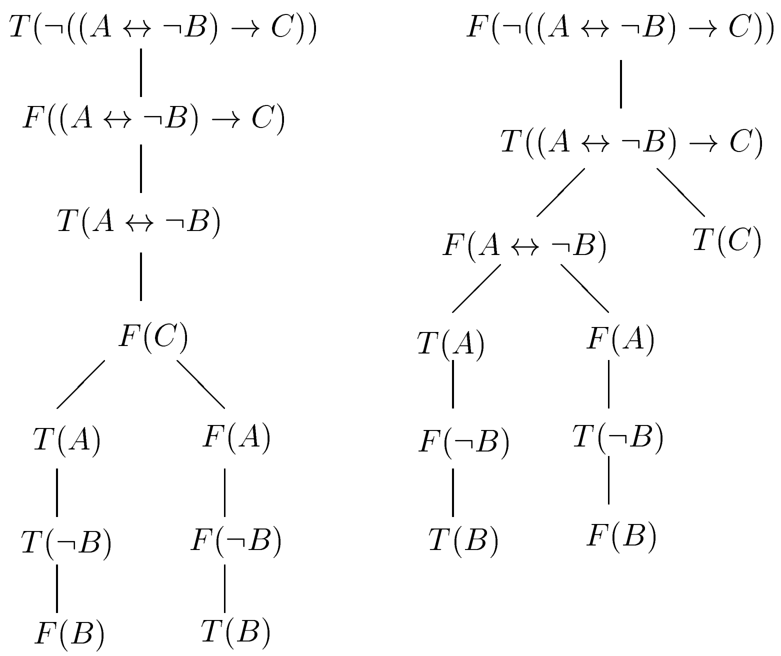
$$
\begin{aligned}
&\neg((A \leftrightarrow \neg B) \rightarrow C) \\
&\qquad \equiv \neg((A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg B \rightarrow A) \rightarrow C) && [\leftrightarrow e] \\
&\qquad \equiv \neg(\neg((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg\neg B \vee A)) \vee C) && [\rightarrow e] \\
&\qquad \equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) \wedge \neg C \ (*) && [\neg\neg e, DM]
\end{aligned}
$$

Tämä onkin jo konjuntiivinen normaalimuoto. Käytetään seuraavaksi konjunktion distributiivisuutta disjunktion yli:

$$
\begin{aligned}
(*) &\equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg C)) \\
&\equiv (\neg A \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg C))) \vee \\
&\quad\ \ (\neg B \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg C))) \\
&\equiv (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge A \wedge \neg C) \vee \\
&\quad\ \ (\neg B \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge A \wedge \neg C) \\
&\equiv (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)
\end{aligned}
$$

Lause on disjunktiivisessa normaalimuodossa. Viimeisessä vaiheessa on jätetty loogisesti epätodet literaalien konjuktiot pois (ts. ne, joissa esintyy jokin atominen lause ja sen negaatio).

b) Taulumenetelmällä on helppo hakea lauseelle mallit, joista voidaan edelleen muodostaa lauseelle disjunktiivinen normaalimuoto. Konstruoidaan lauseelle ja sen negaatiolle semanttiset taulut:



Disjunktiivinen normaalimuoto voidaan nyt lukea ensimmäisen taulun *avoimista* haaroista: $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$. Normaalimuotoon tulee siis yksi konjunktio kutakin taulun avointa haaraa kohden. Jos haarassa on solmu $T(A)$, konjunktioon otetaan lause A ja jos haarassa on solmu $F(A)$, konjunktioon otetaan lause $\neg A$.

Lauseen negaatiolle saadaan toisesta taulusta disjunktiivinen normaalimuoto $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee C$. Muodostamalla tämän lauseen negaatio $\neg((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee C)$ saadaan alkuperäisen lauseen kanssa ekvivalentti lause (kaksoisnegaation poisto). De Morganin sääntöjen avulla lause saadaan muotoon $(\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) \wedge \neg C$, joka on alkuperäisen lauseen konjunktiivinen normaalimuoto. Huomaa, että (a)- ja (b)-kohdissa saadut normaalimuodot ovat samat (ainoa ero on alilauseiden järjestyksessä).

2. Merkintä $\models \phi$ tarkoittaa sitä, että ϕ on pätevä. Molemmissa tapauksissa väitetään siis, että lauseet olisivat päteviä. Tutkitaan lauseiden pätevyys semanttisilla tauluilla tavanomaiseen tapaan:

a)
$$\begin{array}{c}
F((A \to (B \to C)) \to ((A \to C) \to (A \to B)))^1 \\
T(A \to (B \to C))^5 \\
F((A \to C) \to (A \to B))^2 \\
T(A \to C)^4 \\
F(A \to B)^3 \\
T(A) \\
F(B)
\end{array}$$
$$\begin{array}{cccccc}
F(A) & & T(C) & & & \\
\otimes & F(A) & & T(B \to C)^6 & & \\
 & & F(B) & & T(C) &
\end{array}$$

Koska taulu ei sulkeutunut, lause ei ole pätevä, joten väite ei pidä paikkaansa. Haluttu valuaatio (eli vastamalli) saadaan luettua jostain taulun avoimesta haarasta. Jos haarassa esiintyy $T(P)$, asetetaan $\mathcal{V}(P) = T$, ja jos siinä esiintyy $F(P)$, asetetaan $\mathcal{V}(P) = F$. Taulun oikeanpuolimmaisesta haarasta saadaan valuaatio $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(C) = T, \mathcal{V}(B) = F$$

b)
$$\begin{array}{c}
F((\neg B \to (A \to C)) \to (A \to B \vee C))^1 \\
T(\neg B \to (A \to C))^4 \\
F(A \to B \vee C)^2 \\
T(A) \\
F(B \vee C)^3 \\
F(B) \\
F(C)
\end{array}$$
$$\begin{array}{cccc}
F(\neg B)^5 & & T(A \to C)^6 & \\
T(B) & F(A) & & T(C) \\
\otimes & \otimes & & \otimes
\end{array}$$

Taulun kaikki haarat sulkeutuivat, joten lause on pätevä ja väittämä pitää paikkansa.

3. Koska C saadaan resoluutiosäännöllä klausuuleista C_1 ja C_2, on olemassa literaali l sekä klausuulit C_1' ja C_2' siten, että $C = C_1' \cup C_2'$, $C_1 = \{l\} \cup C_1'$ ja $C_2 = \{\bar{l}\} \cup C_2'$.

Olkoon $\mathcal{A}$ totuusjakelu, joka toteuttaa C_1:n ja C_2:n. Tällöin molemmista klausuuleista löytyy ainakin yksi literaali, joka on tosi totuusjakelussa. Totuusjakelun määritelmän perusteella ei voi olla niin, että sekä l että $\bar{l}$ kuuluisivat molemmat $\mathcal{A}$:han.

Tarkastellaan ensin tilannetta $l \in \mathcal{A}$. Koska $\mathcal{A} \models C_2$ ja $\bar{l} \notin A$, täytyy päteä $\mathcal{A} \models C_2'$ ($\mathcal{A}$ toteuttaa jonkun muun literaalin kuin $\bar{l}$ klausuulista). Koska C_2' sisältyy kokonaan klausuuliin C, on C välttämättä tosi aina kun C_2' on tosi, eli $\mathcal{A} \models C$.

Toisessa tapauksessa $\bar{l} \in \mathcal{A}$. Tällöin todistus saadaan samalla periaatteella kuin yllä, mutta vaihtamalla C_2:n tilalle C_1.