Tik-79.144 **Syksy 2000**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 10
Ratkaisut

1.

$$T(\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)))^{1\{x/c\}}$$
$$T(\exists x(\neg R(x) \rightarrow \neg Q(x)))^{2\{x/d\}}$$
$$F(\exists x(P(x) \rightarrow R(x)))^{3\{x/c\},6\{x/d\}}$$
$$T(P(c) \rightarrow Q(c))^{5}$$
$$T(\neg R(d) \rightarrow \neg Q(d))^{8}$$
$$F(P(c) \rightarrow R(c))^{4}$$
$$T(P(c))$$
$$F(R(c))$$
$$F(P(c)) \quad\quad T(Q(c))$$
$$\otimes \quad\quad F(P(d) \rightarrow R(d))^{7}$$
$$T(P(d))$$
$$F(R(d))$$
$$F(\neg R(d)) \quad\quad T(\neg Q(d))$$
$$T(R(d)) \quad\quad F(Q(d))$$
$$\otimes$$

Puun avoimeksi jääneestä haarasta voidaan lukea vastamalli:

$$\mathcal{A} = \{c, d\}$$
$$P^{\mathcal{A}} = \{c, d\}$$
$$R^{\mathcal{A}} = \emptyset$$
$$Q^{\mathcal{A}} = \{c\}$$

2. a) Määritellään predikaatit $R_n(x, y)$ seuraavasti:

$$\begin{gathered}
\forall x R_0(x, x) \\
\forall x \forall y \forall z (R_0(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_1(x, z)) \\
\forall x \forall y \forall z (R_1(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_2(x, z)) \\
\vdots \\
\forall x \forall y \forall z (R_{k-1}(x, y) \wedge K(y, z) \rightarrow R_k(x, z))
\end{gathered}$$

Säännöt siis tarkoittavat, että kaikista solmuista on nollan askeleen mittainen reitti itseensä, ja mikäli solmusta x on $k-1$:n askeleen mittainen reitti solmuun y ja solmusta y on kaari solmuun z, voidaan kyseinen kaari liittää reitin jatkoksi ja saada k:n askeleen reitti solmusta x solmuun z.

Graafi:

$$a \; \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} \; b \longrightarrow c$$

voidaan esittää kaarirelaation avulla seuraavasti:

$$\begin{gathered}
K(a, b) \\
K(b, a) \\
K(b, c)
\end{gathered}$$

b) Resoluutiota varten täytyy ylläoleva lausejoukko muuttaa klausuulimuotoon.

Graafin määritelmästä saadaan suoraan klausuulit:

$$\{K(a, b)\}, \{K(b, a)\}, \{K(b, c)\}$$

Koska kyselyssä halutaan tutkia kolmen askeleen mittaisia reittejä, riittää että R_n:n määritellään n:n arvoon 3 asti. Säännöistä saadaan klausuulit:

$$\begin{gathered}
\{R_0(x, x)\} \\
\{\neg R_0(x, y), \neg K(y, z), R_1(x, z)\} \\
\{\neg R_1(x, y), \neg K(y, z), R_2(x, z)\} \\
\{\neg R_2(x, y), \neg K(y, z), R_3(x, z)\}
\end{gathered}$$

Lisäksi lisätään tutkittavan lauseen negaatio lausejoukkoon:

$$\begin{aligned}
& \neg \exists x (R_2(x, x) \wedge R_3(x, c)) \\
\equiv \quad & \forall x \neg (R_2(x, x) \wedge R_3(x, c)) \\
\equiv \quad & \forall x (\neg R_2(x, x) \vee \neg R_3(x, c)) \\
\Rightarrow \quad & \{\neg R_2(x, x), \neg R_3(x, c))\}
\end{aligned}$$

Resoluutiotodistuksen saa tehtyä helpoiten miettimällä aluksi, mitä kysely tarkoittaa, ja tekemällä todistuksen sen pohjalta. Kyselyssä väitetään, että on olemassa solmu, josta lähtee kahden askeleen mittainen silmukka takaisin itseensä, ja josta pääsee kolmella askeleella solmuun c. Tarkastelemalla graafia huomataan, että solmu b täyttää tämän ehdon. Todistus etenee siten seuraavasti:

1. Todistetaan, että solmusta b on yhden askeleen pituinen reitti solmuun a.
2. Todistetaan, että solmusta b on kahden askeleen pituinen reitti takaisin itseensä.
3. Todistetaan, että solmusta b on kolmen askeleen pituinen reitti solmuun c.

Mikäli tätä strategiaa ei noudata, todistuksesta voi tulla huomattavan hankala.

Todistuksessa nimetään premissiklausuulien muuttujat uudestaan joka kerran, kun niitä käytetään.

1	$\{K(b,a)\}$	P
2	$\{\neg R_0(x_1,y_1), \neg K(y_1,z_1), R_1(x_1,z_1)\}$	P
3	$\{\neg R_0(x_1,b), R_1(x_1,a)\}$	$[1,2]$ MGU: $\{y_1/b, z_1/a\}$
4	$\{R_0(x_2,x_2)\}$	P
5	$\{R_1(b,a)\}$	$[3,4]$ MGU: $\{x_1/b, x_2/b\}$
6	$\{\neg R_1(x_3,y_3), \neg K(y_3,z_3), R_2(x_3,z_3)\}$	P
7	$\{\neg K(a,z_3), R_2(b,z_3)\}$	$[5,6]$ MGU: $\{x_3/b, y_3/a\}$
8	$\{K(a,b)\}$	P
9	$\{R_2(b,b)\}$	$[7,8]$ MGU: $\{z_3/b\}$
10	$\{\neg R_2(x,y), \neg K(y,z), R_3(x,z)\}$	P
11	$\{\neg K(b,z_4), R_3(b,z_4)\}$	$[9,10]$ MGU: $\{x_4/b, y_4/b\}$
12	$\{K(b,c)\}$	P
13	$\{R_3(b,c)\}$	$[11,12]$ MGU: $\{z_4/c\}$
14	$\{\neg R_2(x_5,x_5), \neg R_3(x_5,c)\}$	P
15	$\{\neg R_3(b,c)\}$	$[9,14]$ MGU: $\{x_5/b\}$
16	$\square$	$[13,15]$