Tik-79.144 Logiikka tietotekniikassa: perusteet

Tentti, 12. toukokuuta, 2000: tehtävien malliratkaisut

Tehtävä 1 RATKAISU:

(a) KYLLÄ. Oletetaan, että $\Sigma \models \phi$ eli ϕ on Σ:n looginen seuraus. Tehdään vastaoletus, että $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ on toteutuva. Tällöin löytyy valuaatio $\mathcal{V}$ missä kaikki lausejoukon $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ lauseet ovat tosia. Siis $\mathcal{V}$ on Σ:n malli ja $\mathcal{V}(\neg\phi) = T$. Tästä seuraa, että $\mathcal{V}(\phi) = F$. Loogisen seuraavuuden määritelmän nojalla $\Sigma \not\models \phi$, ristiriita.

(b) EI. Yleisimmät unifioijat ovat muuttujien uudelleennimeämistä vaille yksikäsitteisiä. Vastaesimerkki väittämälle: joukolla $S = \{P(x), P(y)\}$ on yleisimmät unifioijat $\theta = \{x/y\}$ ja $\theta' = \{y/x\}$. Siis $\theta \neq \theta'$.

(c) KYLLÄ. Binäärisen konnektiivin $\circ$ määrittelevässä totuustaulussa on kaksi riviä ja kaksi saraketta seuraavasti:

$\circ$	T	F
T	?	?
F	?	?

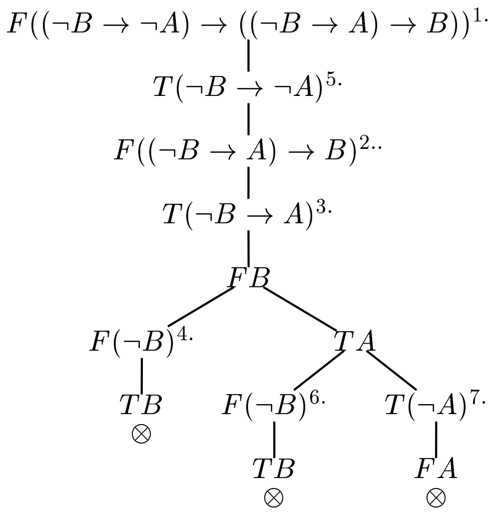
Määriteltävänä on siis 4 totuusarvoa, joiden jokaisen suhteen on luonnollisesti 2 vaihtoehtoa (T/F). Näinollen voidaan muodostaa $2^4 = 16$ erilaista taulua binäärikonnektiivin $\circ$ määrittelemiseksi.

(d) KYLLÄ. Annetuissa klausuuleissa $\{P(x), P(y)\}$ ja $\{\neg P(z), \neg P(w)\}$ esiintyvien atomisten kaavojen joukko $\{P(x), P(y), P(z), P(w)\}$ on unifioituva (yleisin unifioija $\sigma = \{x/w, y/w, z/w\}$). Koska ensimmäinen klausuuli koostuu pelkistä positiivista literaaleista ja toinen klausuuli pelkistä negatiivisista literaleista, voimme johtaa tyhjän klausuulin $\Box$ predikaattilogiikan resoluutiosäännön perusteella.

Arvostelu: 1,5 p / kohta
0,5 p oikeasta KYLLÄ/EI-vastauksesta
+1,0 p järkevästä ja riittävästä perustelusta
mikäli KYLLÄ/EI vastaus on oikein

Tehtävä 2 RATKAISU:

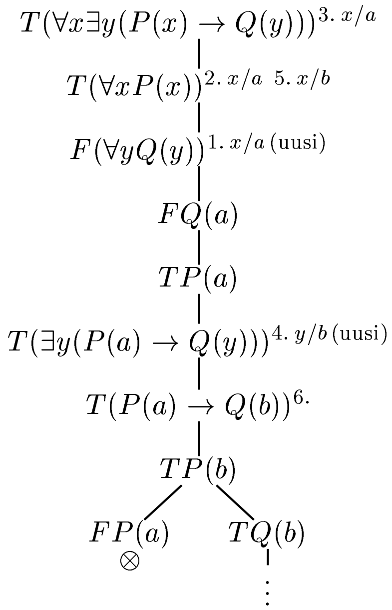
(a) Semanttinen taulu:



Taulu saatiin ristiriitaiseksi, joten väittämä pitää paikkansa.

Arvostelu: 2p semanttisesta taulusta.

(b) Semanttinen taulu:



Ilmeisesti taulua ei saada valmiiksi, koska hajoittamalla ylintä solmua (ja siitä saatavaa solmua) yhä uudestaan saadaan käyttöön mielivaltainen määrä uusia vakoita. Ristiriidattomasta haarasta saadaan kuitenkin vaatimukset $TP(a)$, $TP(b)$, $FQ(a)$ ja $TQ(b)$. Näiden perusteella voidaan konstruoida struktuuri $\mathcal{A}$ universumilla $A = \{1, 2\}$. Tulkitaan symbolit seuraavasti: $a^{\mathcal{A}} = 1$, $b^{\mathcal{A}} = 2$, $P^{\mathcal{A}} = \{1, 2\}$ ja $Q^{\mathcal{A}} = \{2\}$. Koska emme saaneet taulua valmiiksi, on erityisesti vielä todettava, että näillä valinnoilla $\mathcal{A} \models \forall x \exists y (P(x) \to Q(y))$, $\mathcal{A} \models \forall x P(x)$, mutta $\mathcal{A} \not\models \forall y Q(y)$.

Arvostelu: 1p semanttisesta taulusta, 1p struktuurista

(c) Semanttinen taulu:

$T(\forall x(A(x) \leftrightarrow \neg B(x)))^{1.\, x/a}$

$T(\forall x(B(x) \leftrightarrow \neg C(x)))^{2.\, x/a}$

$T(\forall x(C(x) \leftrightarrow \neg A(x)))^{3.\, x/a}$

$F(\forall x(A(x) \wedge B(x) \wedge C(x)))$

$T(A(a) \leftrightarrow \neg B(a))^{4.}$

$T(B(a) \leftrightarrow \neg C(a))^{7.}$

$T(C(a) \leftrightarrow \neg A(a))^{10.}$

- $TA(a)$, $T(\neg B(a))^{5.}$, $FB(a)$
  - $T(B(a))$ $\otimes$
  - $F(B(a))$, $F(\neg C(a))^{8.}$, $TC(a)$
    - $T(C(a))$, $T(\neg A(a))^{11.}$, $FA(a)$ $\otimes$
    - $F(C(a))$ $\otimes$
- $FA(a)$, $F(\neg B(a))^{6.}$, $TB(a)$
  - $T(B(a))$, $T(\neg C(a))^{9.}$, $FC(a)$
    - $T(C(a))$ $\otimes$
    - $F(C(a))$, $F(\neg A(a))^{12.}$, $TA(a)$ $\otimes$
  - $F(B(a))$ $\otimes$

Taulu saatiin ristiriitaiseksi, joten väittämä pitää paikkansa. On syytä huomata, että solmua $F(\forall x(A(x) \wedge B(x) \wedge C(x)))$ ei tarvinnut hajoittaa. Tämä johtuu siitä, että lausejoukko on ristiriitainen jo ilman kyselyn negaatiota. Täten todistus on vietävissä läpi täsmälleen samalla tavalla mille tahansa kyselylle ϕ (ja vastaavalle solmulle $F\phi$).

Arvostelu: 2p semanttisesta taulusta

Tehtävä 3 RATKAISU:

Johdetaan päteväksi todistettavan lauseen negaatiolle klausuulimuoto:

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x(R(x) \land \neg R(f(f(x)))) \to \exists x(R(x) \land \neg R(f(x)))) \\ \rightsquigarrow & \neg(\neg\exists x(R(x) \land \neg R(f(f(x)))) \lor \exists x(R(x) \land \neg R(f(x)))) \\ \rightsquigarrow & \neg\neg\exists x(R(x) \land \neg R(f(f(x)))) \land \neg\exists x(R(x) \land \neg R(f(x)))) \\ \rightsquigarrow & \exists x(R(x) \land \neg R(f(f(x)))) \land \neg\exists x(R(x) \land \neg R(f(x)))) \end{array}$$

Tämän konjunktion jäsenet voidaan saattaa klausuulimuotoon erikseen.

$$\begin{array}{llll} & & & \neg\exists x(R(x) \land \neg R(f(x))) \\ & \exists x(R(x) \land \neg R(f(f(x)))) & \rightsquigarrow & \forall x\neg(R(x) \land \neg R(f(x))) \\ \rightsquigarrow & R(c) \land \neg R(f(f(c))) & \rightsquigarrow & \forall x(\neg R(x) \lor \neg\neg R(f(x))) \\ \rightsquigarrow & \{R(c)\}, \{\neg R(f(f(c)))\} & \rightsquigarrow & \forall x(\neg R(x) \lor R(f(x))) \\ & & \rightsquigarrow & \{\neg R(x), R(f(x))\} \end{array}$$

Resoluutiotodistus:

$$\begin{array}{llll} 1. & \{R(c)\} & \text{(P)} & \\ 2. & \{\neg R(f(f(c)))\} & \text{(P)} & \\ 3. & \{\neg R(x_1), R(f(x_1))\} & \text{(P)} & \\ 4. & \{R(f(c))\} & 1{,}3 & \text{MGU } \{x_1/c\} \\ 5. & \{\neg R(x_2), R(f(x_2))\} & \text{(P)} & \\ 6. & \{R(f(f(c)))\} & 4{,}5 & \text{MGU } \{x_2/f(c)\} \\ 7. & \square & 2{,}6 & \text{MGU } \epsilon \end{array}$$

Yleisempien unifioijien kompositio $\{x_1/c, x_2/f(c)\}$ saadaan suoraan unionina, koska korvaavat termit eivät sisällä muuttujia. Yhtä klausuulia (siis $\{\neg R(x), R(f(x))\}$) tarvittiin todistuksessa kahteen kertaan. Muuttujien uudelleennimeäminen oli siis välttämätöntä. Suositeltavinta on tehdä uudelleennimeäminen systemaattisesti esimerkiksi alaindeksejä käyttäen.

Arvostelu: 3p klausuulimuodon johtamisesta
3p resoluutiotodistuksesta

Tehtävä 4 RATKAISU:

(a) Esitetään luonnolliset luvut $0, 1, 2, \ldots$ käyttäen muuttujattomia termejä $0, s(0), s(s(0)), \ldots$. Käytetään muotoa $s(s(\ldots s(t)\ldots))$ olevasta termistä, jossa termin t ympärillä on n kappaletta funktiosymbolin s ilmentymiä sulkuineen, lyhennysmerkintää $s^n(t)$. Näinollen $s^0(t)$ on sama kuin t. Kirjoitetaan predikaateille $J2(x)$ = "x on jaollinen kahdella", $J3(x)$ = "x on jaollinen kolmella" ja $J6(x)$ = "x on jaollinen kuudella" kaikki luonnolliset luvut x kattavat määritelmät:

- $J2(0)$ ja $\forall x(J2(x) \to J2(s^2(x)))$.
- $J3(0)$ ja $\forall x(J3(x) \to J3(s^3(x)))$.
- $\forall x(J2(x) \land J3(x) \to J6(x))$.

Ajatuksena on, että universumina ovat luonnolliset luvut, joten emme erikseen määrittele predikaattia $N(x)$ = "x on luonnollinen luku". Vakiosymboli 0 tulkitaan 0:ksi ja funktiosymboli s seuraajafunktioksi.

(b) On osoitettava, että lause $\forall x(J2(x) \land J3(x) \to J6(s^6(x)))$ seuraa loogisesti määritelmistä. Taulutodistus on annettu seuraavalla sivulla.

Kannattaa kiinnittää huomiota taulutodistuksen ideaan. Lähtökohtana on, että a on jaollinen kahdella ja kolmella (taulussa $TJ2(a)$ ja $TJ3(a)$). Tämän perusteella $s^2(a)$, $s^4(a)$ ja $s^6(a)$ ovat jaollisia kahdella (taulussa $TJ2(s^2(a))$, $TJ2(s^4(a))$ ja $TJ2(s^6(a))$). Samaan tapaan $s^3(a)$ ja $s^6(a)$ ovat kolmella jaollisia (taulussa $TJ3(s^3(a))$ ja $TJ3(s^6(a))$). Niinpä $s^6(a)$ on kuudella jaollinen (taulussa $TJ6(s^6(a))$), siis ristiriita vastaoletuksen kanssa (taulussa $FJ6(s^6(a))$).

Arvostelu: 3p formalisointi (mukaanlukien kysely)
3p taulutodistus

$$T(J2(0))$$
$$T(\forall x(J2(x) \to J2(s^2(x))))^{4.\ x/a\ \ 6.\ x/s^2(a)\ \ 8.\ x/s^4(a)}$$
$$T(J3(0))$$
$$T(\forall x(J3(x) \to J3(s^3(x))))^{10.\ x/a\ \ 12.\ x/s^3(a)}$$
$$T(\forall x(J2(x) \land J3(x) \to J6(x)))^{14.\ x/s^6(a)}$$
$$F(\forall x(J2(x) \land J3(x) \to J6(s^6(x))))^{1.\ x/a\,(\text{uusi})}$$
$$F(J2(a) \land J3(a) \to J6(s^6(a)))^{2.}$$
$$T(J2(a) \land J3(a))^{3.}$$
$$FJ6(s^6(a))$$
$$TJ2(a)$$
$$TJ3(a)$$
$$T(J2(a) \to J2(s^2(a)))^{5.}$$

- $FJ2(a)$ $\otimes$
- $TJ2(s^2(a))$
  - $T(J2(s^2(a)) \to J2(s^4(a)))^{7.}$
    - $FJ2(s^2(a))$ $\otimes$
    - $TJ2(s^4(a))$
      - $T(J2(s^4(a)) \to J2(s^6(a)))^{9.}$
        - $FJ2(s^4(a))$ $\otimes$
        - $TJ2(s^6(a))$
          - $T(J3(a) \to J3(s^3(a)))^{11.}$
            - $FJ3(a)$ $\otimes$
            - $TJ3(s^3(a))$
              - $T(J3(s^3(a)) \to J3(s^6(a)))^{13.}$
                - $FJ3(s^3(a))$ $\otimes$
                - $TJ3(s^6(a))$
                  - $T(J2(s^6(a)) \land J3(s^6(a)) \to J6(s^6(a)))^{15.}$
                    - $F(J2(s^6(a)) \land J3(s^6(a)))^{16.}$
                      - $FJ2(s^6(a))$ $\otimes$
                      - $FJ3(s^6(a))$ $\otimes$
                    - $TJ6(s^6(a))$ $\otimes$

Taulukko 1: Tehtävän 4 ratkaisussa tarvittava semanttinen taulu