Tik-79.144 Logiikka tietotekniikassa: perusteet

Tentti, 14. tammikuuta, 2000: tehtävien malliratkaisut

Tehtävä 1 RATKAISU:

(a) KYLLÄ.

$$\begin{aligned}\neg(A \rightarrow (\neg B \vee \neg C)) &\equiv \neg(\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \\ &\equiv \neg\neg A \wedge \neg\neg B \wedge \neg\neg C \\ &\equiv A \wedge B \wedge C\end{aligned}$$

Tämä on sekä disjunktiivinen että konjuktiivinen normaalimuoto.

(b) EI. Muodostetaan vastaesimerkki väittämälle: $\phi = P$ ja $\psi = \neg P$. Nyt lause $P \vee \neg P$ (eli $\phi \vee \psi$) on pätevä (tosi kaikissa valuaatioissa), mutta kumpikaan lauseista ϕ ja ψ ei ole pätevä: kun P on epätosi, ϕ on epätosi, ja kun P on tosi, ψ on epätosi.

(c) KYLLÄ. Lauselogiikan toteutuvuusongelmassa (SATissa) selvitetään, onko annettulla lauseella ϕ mallia. SAT on NP-täydellinen, koska

- SAT $\in$ NP

  eli ongelma voidaa ratkaista epädeterministisellä Turing-koneella polynomisessa ajassa lauseen ϕ pituuden suhteen (valitaan epädeterministisesti valuaatio $\mathcal{V}$ ja tarkistetaan, että $\mathcal{V}(\phi) = T$) ja
- SAT on NP-kova

  eli muut NP-luokan ongelmat voidaan redusoida polynomisessa ajassa SAT-ongelmaksi.

(d) EI. Oletetaan, että klausuuleissa $\{A, \neg B\}$ ja $\{\neg B, A\}$ saadaan resoluutiolla tyhjä klausuuli $\Box$. Tästä seuraa, että $S = \{A, \neg B\}$,$\{\neg A, B\}$ on toteutumaton, koska resoluutiosääntö säilyttää toteutuvuuden ja $\Box$ ei ole toteutuva. Klausuulijoukko S on kuitenkin tosi totuusarvojakelussa $\{A, B\}$ ja siten toteutuva. Ristiriita, joten S:n klausuuleista ei saada resoluutiolla tyhjää klausuulia $\Box$.

Toinen mahdollisuus on tutkia, millaisia klausuuleja S:n klausuuleista voidaan resoluutiosäännöllä johtaa. Näitä ovat: $\{A, \neg A\}$, $\{B, \neg B\}$. Muita klausuuleja ei pystytä johtamaan.

Arvostelu: 1,5 p / kohta
0,5 p oikeasta KYLLÄ/EI-vastauksesta
+1,0 p järkevästä ja riittävästä perustelusta
mikäli KYLLÄ/EI vastaus on oikein

Tehtävä 2 RATKAISU:

(a) Semanttinen taulu:

$T(A \to D)^{1.}$
$T(A \vee \neg B \vee C)^{2.}$
$T(D \to C)^{4.}$
$T(B)$
$F(D)$

- $F(A)$
  - $T(A)$
    $\otimes$
  - $T(\neg B)^{3.}$
    $F(B)$
    $\otimes$
  - $T(C)$
    - $F(D)$
    - $T(C)$
- $T(D)$
  $\otimes$

Taulua ei saada ristiriitaiseksi. Molemmista ei-ristiriitaisista haaroista saadaan samat vaatimukset: $F(A)$, $T(B)$, $T(C)$, $F(D)$. Muodostetaan valuaatio $\mathcal{V}$ seuraavasti: $\mathcal{V}(A) = F$, $\mathcal{V}(B) = T$, $\mathcal{V}(C) = T$ ja $\mathcal{V}(D) = F$. Näillä valinnoilla lausejoukon lauseet ovat tosia, tutkittava lause D on epätosi. Väittämä ei siis pidä paikkansa.

Arvostelu: 1p semanttisesta taulusta, 1p vastaesimerkistä.

(b) Semanttinen taulu:

$F[\forall x \exists y R(x,y) \to (\forall y(\neg S(y) \to \neg \exists x R(x,y)) \to \exists x S(x))]^{1.}$
$T(\forall x \exists y R(x,y))^{3.\ x/a}$
$F(\forall y(\neg S(y) \to \neg \exists x R(x,y)) \to \exists x S(x))^{2.}$
$T(\forall y(\neg S(y) \to \neg \exists x R(x,y)))^{5.\ y/b}$
$F(\exists x S(x))^{9.\ x/b}$
$T(\exists y R(a,y))^{4.\ y/b}$
$T(R(a,b))$
$T(\neg S(b) \to \neg \exists x R(x,b))^{6.}$

- $F(\neg S(b))^{7.}$
  $T(S(b))$
  $F(S(b))$
  $\otimes$
- $T(\neg \exists x R(x,b))^{8.}$
  $F(\exists x R(x,b))^{10.\ x/a}$
  $F(R(a,b))$
  $\otimes$

4. askelessa b on taulusääntöjen edellyttämä uusi vakio. Taulu saatiin ristiriitaiseksi, joten väittämä pitää paikkansa.

Arvostelu: 2p semanttisesta taulusta

(c) Semanttinen taulu:

$$
\begin{array}{c}
T(\forall x(P(x) \to Q(x) \lor R(x)))^{7.\,x/a} \\
| \\
T(\neg \exists x R(x))^{5.} \\
| \\
F(\forall x(\neg Q(x) \to \neg P(x)))^{1.\,x/a} \\
| \\
F(\neg Q(a) \to \neg P(a))^{2.} \\
| \\
T(\neg Q(a))^{3.} \\
| \\
F(\neg P(a))^{4.} \\
| \\
F(Q(a)) \\
| \\
T(P(a)) \\
| \\
F(\exists x R(x))^{6.\,x/a} \\
| \\
F(R(a)) \\
| \\
T(P(a) \to Q(a) \lor R(a))^{8.} \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} F(P(a)) \\ \otimes \end{array} &
\begin{array}{c} T(Q(a) \lor R(a))^{9.} \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \begin{array}{cc} \begin{array}{c} T(Q(a)) \\ \otimes \end{array} & \begin{array}{c} T(R(a)) \\ \otimes \end{array} \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

1. askelessa a on taulusääntöjen edellyttämä uusi vakio. Taulu saatiin ristiriitaiseksi, joten väittämä pitää paikkansa.

Arvostelu: 2p semanttisesta taulusta

Tehtävä 3 RATKAISU:

(a) Esitetään binääripuut kaksipaikkaisen funktiosymbolin s (sisäsolmut) ja yksipaikkaisen funktiosymbolin l (lehtisolmut) avulla. Määritellään predikaatti $\mathrm{PK}(x, y)$ = "binääripuu x on binääripuun y peilikuva" rekursiivisesti siten, että määritelmä kattaa kaikki binääripuut x ja y.

- $\forall x PK(l(x), l(x))$
- $\forall x \forall y \forall z \forall v (PK(x, y) \wedge PK(z, v) \rightarrow PK(s(x, z), s(v, y)))$

Johdetaan klausuulimuodot:

$\forall x PK(l(x), l(x)) \quad \rightsquigarrow \quad \{PK(l(x), l(x))\}$ (P1)

$$\begin{array}{ll} & \forall x \forall y \forall z \forall v (PK(x, y) \wedge PK(z, v) \rightarrow PK(s(x, z), s(v, y))) \\ \rightsquigarrow & \forall x \forall y \forall z \forall v (\neg(PK(x, y) \wedge PK(z, v)) \vee PK(s(x, z), s(v, y))) \\ \rightsquigarrow & \forall x \forall y \forall z \forall v (\neg PK(x, y) \vee \neg PK(z, v) \vee PK(s(x, z), s(v, y))) \\ \rightsquigarrow & \{\neg PK(x, y), \neg PK(z, v), PK(s(x, z), s(v, y))\} \text{ (P2)} \end{array}$$

(b) Todistettavan lauseen negaatio:

$$\begin{array}{ll} & \neg PK(s(s(l(c), l(a)), l(b)), s(l(b), s(l(a), l(c)))) \\ \rightsquigarrow & \{\neg PK(s(s(l(c), l(a)), l(b)), s(l(b), s(l(a), l(c))))\} \text{ (P3)} \end{array}$$

Resoluutiotodistus:

1.	$\{\neg PK(s(s(l(c), l(a)), l(b)), s(l(b), s(l(a), l(c))))\}$	(P3)
2.	$\{\neg PK(x_1, y_1), \neg PK(z_1, v_1), PK(s(x_1, z_1), s(v_1, y_1))\}$	(P2)
3.	$\{\neg PK(s(l(c), l(a)), s(l(a), l(c))), \neg PK(l(b), l(b))\}$	1,2
	MGU $\{x_1/s(l(c), l(a)),\ z_1/l(b),\ v_1/l(b),\ y_1/s(l(a), l(c))\}$	
4.	$\{PK(l(x_2), l(x_2))\}$	(P1)
5.	$\{\neg PK(s(l(c), l(a)), s(l(a), l(c)))\}$	3,4
	MGU $\{x_2/b\}$	
6.	$\{\neg PK(x_3, y_3), \neg PK(z_3, v_3), PK(s(x_3, z_3), s(v_3, y_3))\}$	(P2)
7.	$\{\neg PK(l(c), l(c)), \neg PK(l(a), l(a))\}$	5,6
	MGU $\{x_3/l(c),\ z_3/l(a),\ v_3/l(a),\ y_3/l(c)\}$	
8.	$\{PK(l(x_4), l(x_4))\}$	(P1)
9.	$\{\neg PK(l(a), l(a))\}$	7,8
	MGU $\{x_4/c\}$	
10.	$\{PK(l(x_5), l(x_5))\}$	(P1)
11.	$\square$	9,10
	MGU $\{x_5/a\}$	

Yleisempien unifioijien kompositio saadaan suoraan unionina, koska korvaavat termit eivät sisällä muuttujia.

Arvostelu: 2p lauseista
1p klausuulimuodosta
3p resoluutiotodistuksesta

Tehtävä 4 RATKAISU:

(a) Esitetään luonnolliset luvut $0, 1, 2, \ldots$ käyttäen muuttujattomia termejä $0, s(0), s(s(0)), \ldots$. Kirjoitetaan predikaateille $O(x)$ = "x on pariton", $E(x)$ = "x on parillinen" ja $G(x, y)$ = "x on suurempi kuin y" kaikki luonnolliset luvut x ja y kattavat määritelmät:

- $E(0)$ ja $\forall x(E(x) \to E(s(s(x))))$.
- $O(s(0))$ ja $\forall x(O(x) \to O(s(s(x))))$.
- $\forall x G(s(x), 0)$ ja $\forall x \forall y(G(x, y) \to G(s(x), s(y)))$.

Ajatuksena on, että universumina ovat luonnolliset luvut, joten emme määrittele predikaattia $N(x)$ = "x on luonnollinen luku". Vakiosymboli 0 tulkitaan 0:ksi ja funktiosymboli s seuraajafunktioksi.

(b) Kyselynä on $\exists x(E(x) \wedge \exists y(O(y) \wedge G(x, y)))$.

$$
\begin{array}{c}
T(E(0)) \\
| \\
T(\forall x(E(x) \to E(s(s(x)))))^{3.\ x/0} \\
| \\
T(O(s(0))) \\
| \\
T(\forall x(O(x) \to O(s(s(x))))) \\
| \\
T(\forall x G(s(x), 0))^{7.\ x/0} \\
| \\
T(\forall x \forall y(G(x, y) \to G(s(x), s(y))))^{8.\ x/s(0),\ y/0} \\
| \\
F(\exists x(E(x) \wedge \exists y(O(y) \wedge G(x, y))))^{1.\ x/s(s(0))} \\
| \\
F(E(s(s(0))) \wedge \exists y(O(y) \wedge G(s(s(0)), y)))^{2.} \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
F(E(s(s(0)))) \\
| \\
T(E(0) \to E(s(s(0))))^{4.} \\
\begin{array}{cc}
F(E(0)) & T(E(s(s(0)))) \\
\otimes & \otimes
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
F(\exists y(O(y) \wedge G(s(s(0)), y)))^{5.\ y/s(0)} \\
| \\
F(O(s(0)) \wedge G(s(s(0)), s(0)))^{6.} \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} F(O(s(0))) \\ \otimes \end{array}
&
\begin{array}{c}
F(G(s(s(0)), s(0))) \\
| \\
T(G(s(0), 0)) \\
| \\
T(G(s(0), 0) \to G(s(s(0)), s(0)))^{9.} \\
\begin{array}{cc}
F(G(s(0), 0)) & T(G(s(s(0)), s(0))) \\
\otimes & \otimes
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Arvostelu: 3p formalisointi (mukaanlukien kysely)
3p taulutodistus