Tik-79.144 **Syksy 1999**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 6
Ratkaisut

1. Ratkaisussa on käytetty useaan otteeseen rajoitettuja universaali- ja eksistentiaalikvanttoreita. Jos halutaan ilmaista, että jokin ominaisuus $\phi(x)$ pätee kaikille predikaatin $P(x)$ toteuttaville alkioille x, kirjoitetaan $\forall x(P(x) \to \phi(x))$. Se, että ominaisuus $\phi(x)$ pätee jollekin predikaatin $P(x)$ toteuttavalle alkiolle x, ilmaistaan lauseella $\exists x(P(x) \wedge \phi(x))$. Tehtävässä predikaatti $P(x)$ ilmaisee usein alkion tyyppiä (esim. x on portti).

a) $\exists x(P(x) \wedge V(x))$, kun
$P(x) = x$ on portti.
$V(x) = x$ on viallinen.

b) $A(a) \wedge (\forall x(A(x) \wedge \neg(x = a) \to N(a, x))$, kun
$a =$ ko. algoritmi.
$A(x) = x$ on algoritmi.
$N(x, y) = x$ on y:tä nopeampi.

c) $\forall x(K(x) \to \exists y(T(y) \wedge R(x, y)))$, kun
$K(x) = x$ osallistuu kurssille.
$T(x) = x$ on työasema.
$R(x, y) = x$ käyttää y:tä.

d) $\forall x(T(x) \to \forall y \forall z(P(y) \wedge P(z) \wedge K(y, x) \wedge K(z, x) \to y = z))$, kun
$P(x) = x$ on prosessi.
$T(x) = x$ on tiedosto.
$K(x, y) = x$ kirjoittaa y:hyn.

Esitetyt ratkaisut eivät ole ainoita mahdollisia. Valinnan varaa on predikaatti-, funktio- ja vakiosymbolien määrittelyssä ja lauseiden rakenteessa.

2. a) Graafista meitä kiinnostavat erityisesti kaaret, joiden esittämistä varten määritellään predikaatti $K(x, y)$ (graafissa on kaari solmusta x solmuun y). Värien esittämiseen on useita mahdollisuuksia.

(i) Yksi mahdollisuus on kiinnittää värien joukko ja esittää värit predikaatein. Jos joukossa C on värejä n kpl määritellään predikaatit $C_1(x), \ldots, C_n(n)$. Predikaatti $C_i(x)$ tarkoittaa, että solmu x on väriltään C_i. Ongelman määrittelyssä vaaditaan, että jokaisella solmulla on yksikäsitteinen väri ja että jos solmujen välillä on kaari, solmut ovat erivärisét. Ensimmäisestä vaatimuksesta saadaan lauseet

$$\forall x(C_i(x) \leftrightarrow \neg C_1(x) \wedge \cdots \wedge \neg C_{i-1}(x) \wedge \neg C_{i+1} \wedge \cdots \wedge \neg C_n(x))$$

indeksin i arvoilla $1, \ldots, n$ (huomaa, että $\neg C_i(x)$ ei esiinny ekvivalenssin oikean puolen konjuktiossa). Toinen vaatimus esitetään jokaisen predikaatin $C_i(x)$ osalta erikseen:

$$\forall x \forall y(K(x,y) \to (C_i(x) \to \neg C_i(y))).$$

(ii) Toinen mahdollisuus on jättää värien määrittely avoimeksi ja ottaa käyttöön predikaatti $V(x,y)$ (solmun x väri on y). Solmun värin yksikäsitteisyys voidaan ilmaista lauseella

$$\forall x \forall y \forall z(V(x,y) \wedge V(x,z) \to y = z).$$

Siis, jos solmulla x on värit y ja z, nämä ovat itseasiassa sama väri (yhtäsuuruus predikaatti $=$ on tosi rakenteessa $\mathcal{A}$, jos ja vain jos predikaatin argumenttien tulkinnat ovat samat rakenteessa $\mathcal{A}$). Vierekkäisten solmujen erivärisyys saadaan puettua lauseeksi

$$\forall x \forall y \forall z(K(x,y) \to (V(x,z) \to \neg V(y,z)).$$

Eli, jos graafissa on kaari solmusta x solmuun y ja solmu x on väriltään z, solmu y ei ole väriltään z.

(iii) Kolmantena mahdollisuutena on esittää väri funktiosymbolin v avulla. Termi $v(x)$ tarkoittaa solmun x väriä. Tässä tapauksessa värin yksikäsitteisyyttä ei tarvitse erikseen määritellä (funktion arvo on aina yksikäsitteinen). Erivärisyydelle saadaan lause

$$\forall x \forall y(K(x,y) \to \neg(v(x) = v(y))).$$

b) Annetaan malli kohdan (i) lauseille tapauksessa $n = 2$. Määritellään rakenne $\mathcal{A}$, jonka universumina on $A = \{a_1, a_2\}$ (kaksi solmua). Predikaatin K tulkinta on $K^{\mathcal{A}} = \{\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_1\rangle\}$ (graafissa on kaaret solmusta a_1 solmuun a_2 ja solmusta a_2 solmuun a_1). Predikaattien C_1 ja C_2 tulkinnat ovat $C_1^{\mathcal{A}} = \{a_1\}$ ja $C_2^{\mathcal{A}} = \{a_2\}$ (toinen solmuista on siis väriä C_1 ja toinen väriä C_2). Lisäksi joudumme olettamaan, että kieleen sisältyy vakiosymbolit s_1 ja s_2, joiden tulkintoina rakenteessa $\mathcal{A}$ ovat a_1 ja a_2. Tämä johtuu rakenteen määritelmästä, jossa edellytetään että kaikille universumin A

alkioille a on olemassa muuttujaton termi, siten että $t^{\mathcal{A}} = a$ (jokainen universumin alkio on täten esitettävissä jollain termillä eli "nimettävissä").

Tarkistetaan nyt totuusmääritelmän avulla, että lauseet

$$\forall x(C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$$

$$\forall x \forall y(K(x,y) \rightarrow (C_1(x) \rightarrow \neg C_1(y))$$

ja

$$\forall x \forall y(K(x,y) \rightarrow (C_2(x) \rightarrow \neg C_2(y))$$

toteutuvat rakenteessa $\mathcal{A}$ (eli $\mathcal{A}$ on lauseiden malli). Huomaa että lauseista ensimmäinen on ekvivalentti lauseen

$$\forall x(C_2(x) \leftrightarrow \neg C_1(x))$$

kanssa, joka myös kuuluu lausejoukkoon tapauksessa $n = 2$. Koska s_1 ja s_2 ovat ainoat termit,

$$\mathcal{A} \models \forall x(C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$$

jos ja vain jos

$$\mathcal{A} \models (C_1(s_1) \leftrightarrow \neg C_2(s_1)) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{A} \models (C_1(s_2) \leftrightarrow \neg C_2(s_2))$$

Koska $s_1^{\mathcal{A}} \in C_1^{\mathcal{A}}$,

$$\mathcal{A} \models C_1(s_1)$$

ja koska $s_1^{\mathcal{A}} \notin C_2^{\mathcal{A}}$,

$$\mathcal{A} \not\models C_2(s_1)$$

Siis

$$\mathcal{A} \models (C_1(s_1) \leftrightarrow \neg C_2(s_1))$$

Vastaavasti osoitetaan, että $\mathcal{A} \models (C_1(s_2) \leftrightarrow \neg C_2(s_2))$, joten $\mathcal{A} \models \forall x(C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$ seuraa.

Vastaavasti

$$\mathcal{A} \models \forall x \forall y(K(x,y) \rightarrow (C_1(x) \rightarrow \neg C_1(y))$$

jos ja vain jos lauseet

$$
\begin{aligned}
&K(s_1, s_1) \to (C_1(s_1) \to \neg C_1(s_1)),\\
&K(s_1, s_2) \to (C_1(s_1) \to \neg C_1(s_2)),\\
&K(s_2, s_1) \to (C_1(s_2) \to \neg C_1(s_1)) \text{ ja}\\
&K(s_2, s_2) \to (C_1(s_2) \to \neg C_1(s_2))
\end{aligned}
$$

ovat tosia rakenteessa A. Koska parit $\langle s_1^{\mathcal{A}}, s_1^{\mathcal{A}} \rangle$ ja $\langle s_2^{\mathcal{A}}, s_2^{\mathcal{A}} \rangle$ eivät kuulu tulkintaan $K^{\mathcal{A}}$, atomiset lauseet $K(s_1, s_1)$ ja $K(s_2, s_2)$ ovat epätosia rakenteessa $\mathcal{A}$, joten implikaation totuusmääritelmän perusteella edellä annetuista neljästä lauseesta ensimmäinen ja viimeinen ovat tosia rakentessa $\mathcal{A}$. Koska pari $\langle s_1^{\mathcal{A}}, s_2^{\mathcal{A}} \rangle$ kuuluu tulkintaan $K^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \models K(s_1, s_2)$ ja lauseista toinen on tosi rakenteessa $\mathcal{A}$, jos ja vain jos $\mathcal{A} \models C_1(s_1) \to \neg C_1(s_2)$. Tämä pitää paikkansa, sillä $s_1^{\mathcal{A}} \in C_1^{\mathcal{A}}$ ja $s_2^{\mathcal{A}} \notin C_1^{\mathcal{A}}$, joten $\mathcal{A} \models C_1(s_1)$ ja $\mathcal{A} \models \neg C_1(s_2)$. Myös kolmas lause toteutuu. Erona edelliseen on, että implikaatio $C_1(s_2) \to \neg C_1(s_1)$ on tosi rakenteessa $\mathcal{A}$, koska $\mathcal{A} \not\models C_1(s_2)$. Siis $\mathcal{A}$ on malli lauseelle $\forall x \forall y (K(x, y) \to (C_1(x) \to \neg C_1(y))$.

Symmetriasyistä $\mathcal{A}$ on myös lauseen $\forall x \forall y (K(x, y) \to (C_2(x) \to \neg C_2(y))$ malli. Olemme siis osoittaneet, että $\mathcal{A}$ on lausejoukon malli. Sama rakenne on malli myös tapauksesa, jossa värejä on useampia kuin kaksi.

Malleista tulee monimutkaisempia, jos solmujen väritys esitetään vaihtoehtojen (ii) ja (iii) mukaisesti.

c) Määritellään rakenne $\mathcal{A}$ tapauksessa $n = 2$, jossa lausejoukko ei toteudu. Valitaan universumiksi $A = \{a\}$ (yksi solmu) ja predikaatin K tulkinnaksi esim. $K^{\mathcal{A}} = \{\langle a, a \rangle\}$. Olkoon s vakiosymboli, jonka tulkintana on a. Nyt

$$\forall x (C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x)$$

ei toteudu rakenteessa $\mathcal{A}$, jos

$$\mathcal{A} \not\models C_1(s) \leftrightarrow \neg C_2(s)$$

Valitaan siis väripredikaattien tulkinnat siten, että

$$\mathcal{A} \models C_1(s) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{A} \models C_2(s)$$

asettamalla

$$C_1^{\mathcal{A}} = C_2^{\mathcal{A}} = \{a\}$$

Tällöin $\mathcal{A}$ ei voi olla lausejoukon malli.