Tik-79.144 **Syksy 1999**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 5
Ratkaisut

1. Muunnetaan lauseet konjuntiiviseen normaalimuotoon ja klausuuleiksi. Taulukossa on viimeisenä todistettavan kaavan negaatio $P1 \wedge P2$.

Lause		Klausuulit
$Pi \vee Ki \vee Vi$		$\{Pi, Ki, Vi\}$
$Pi \rightarrow \neg Ki \wedge \neg Vi$	$\equiv \neg Pi \vee (\neg Ki \wedge \neg Vi)$ $\equiv (\neg Pi \vee \neg Ki) \wedge (\neg Pi \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Pi, \neg Vi\}$
$Ki \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Vi$	$\equiv (\neg Ki \vee \neg Pi) \wedge (\neg Ki \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$Vi \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Ki$	$\equiv (\neg Vi \vee \neg Pi) \wedge (\neg Vi \vee \neg Ki)$	$\{\neg Pi, \neg Vi\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$\neg(V1 \wedge V2)$	$\equiv \neg V1 \vee \neg V2$	$\{\neg V1, \neg V2\}$
$P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$	$\equiv \neg P1 \vee K2 \vee V2$	$\{\neg P1, K2, V2\}$
$P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$	$\equiv \neg P2 \vee K1 \vee V1$	$\{\neg P2, K1, V1\}$
$P1 \wedge P2$		$\{P1\}, \{P2\}$

Osoitamme seuraavaksi taulukossa annettujen klausuulien joukon toteutumattomaksi (tyhjä klausuuli $\{\}$ tarkoittaa ristiriitaa), jolloin lause $\neg(P1 \wedge P2)$ on johdettavissa muista klausuuleista:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
\{\neg P1, K2, V2\} \arrow[dr, dash] & & \{P1\} \arrow[dl, dash] & & & \\
& \{K2, V2\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg P2, \neg K2\} \arrow[dl, dash] & & \\
& & \{\neg P2, V2\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg P2, \neg V2\} \arrow[dl, dash] & \\
& & & \{\neg P2\} \arrow[dr, dash] & & \{P2\} \arrow[dl, dash] \\
& & & & \{\} &
\end{tikzcd}
$$

2. Mallinnetaan kemialliset reaktiot implikaatioiksi, jotka muutetaan sitten klausuulimuotoon. Tuloksena saadaan klausuulit:

(1)

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{MgO} + \mathrm{H_2} \rightarrow \mathrm{Mg} + \mathrm{H_2O} \\
\Longrightarrow & \mathrm{MgO} \wedge \mathrm{H_2} \rightarrow \mathrm{Mg} \wedge \mathrm{H_2O} \\
\Longrightarrow & \neg \mathrm{MgO} \vee \neg \mathrm{H_2} \vee (\mathrm{Mg} \wedge \mathrm{H_2O}) \\
\Longrightarrow & (\neg \mathrm{MgO} \vee \neg \mathrm{H_2} \vee \mathrm{Mg}) \wedge (\neg \mathrm{MgO} \vee \neg \mathrm{H_2} \vee \mathrm{H_2O})
\end{aligned}
$$

Reaktiosta syntyi siis kaksi klausuulia: $\{\neg \mathrm{MgO}, \neg \mathrm{H_2}, \mathrm{Mg}\}$ sekä $\{\neg \mathrm{MgO}, \neg \mathrm{H_2}, \mathrm{H_2O}\}$.

(2)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{C} + \mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2} \\
\Longrightarrow &\mathrm{C} \wedge \mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2} \\
\Longrightarrow &\neg \mathrm{C} \vee \neg \mathrm{O_2} \vee \neg \mathrm{CO_2} \Longrightarrow \qquad \{\neg \mathrm{C}, \neg \mathrm{O_2}, \neg \mathrm{CO_2}\}
\end{aligned}
$$

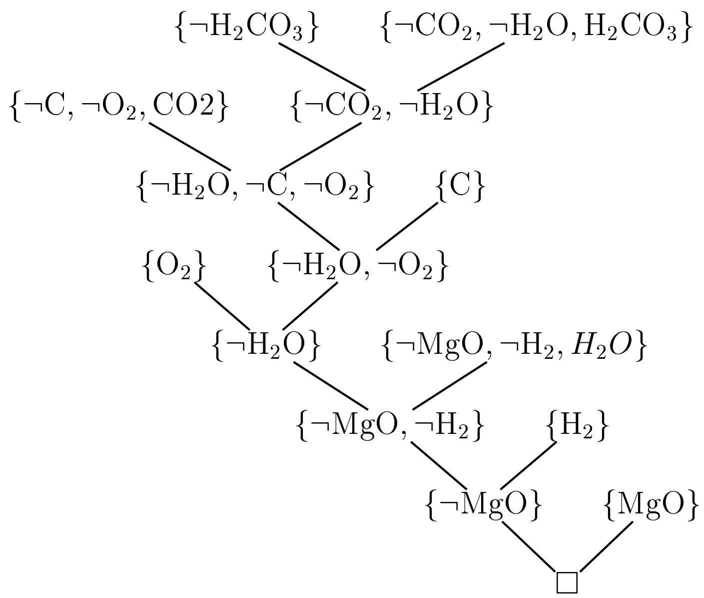
(3)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O} \to \mathrm{H_2CO_3} \\
\Longrightarrow &\mathrm{CO_2} \wedge \mathrm{H_2O} \to \mathrm{H_2CO_3} \\
\Longrightarrow &\neg \mathrm{CO_2} \vee \neg \mathrm{H_2O} \vee \neg \mathrm{H_2CO_3} \Longrightarrow \quad \{\neg \mathrm{CO_2} \vee \neg \mathrm{H_2O} \vee \neg \mathrm{H_2CO_3}\}
\end{aligned}
$$

Lisäksi lähtöaineista saadaan neljän klausuulin joukko:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{MgO} \wedge \mathrm{H_2} \wedge \mathrm{O_2} \wedge \mathrm{C} \\
\Longrightarrow &\{\mathrm{MgO}\}, \{\mathrm{H_2}\}, \{\mathrm{O_2}\}\{\mathrm{C}\}
\end{aligned}
$$

Merkitään ylläolevaa klausuuliijoukkoa Σ. Nyt halutaan todistaa, että $\Sigma \models \mathrm{H_2CO_3}$. Todistus tehdään osoittamalla, että $\Sigma \cup \{\neg \mathrm{H_2CO_3}\}$ on toteutumaton:



3. Laaditaan semanttinen taulu. Väittämä $\{P, Q \to (P \to R)\} \vdash Q \to R$ seuraa, koska taulun kaikki haarat sulkeutuvat.

$$T(P)$$
$$T(Q \to (P \to R))$$
$$F(Q \to R)$$
$$T(Q)$$
$$F(R)$$
$$\begin{array}{cc} F(Q) & T(P \to R) \\ \otimes & \begin{array}{cc} F(P) & T(R) \\ \otimes & \otimes \end{array} \end{array}$$

Taulumenetelmän etuna on, että päättelysääntö voidaan valita suoraan lauseen muodon perusteella.

3. Merkintä $\vDash \phi$ tarkoittaa sitä, että ϕ on pätevä. Molemmissa tapauksissa väitetään siis, että lauseet olisivat päteviä. Tutkitaan lauseiden pätevyys semanttisilla tauluilla tavanomaiseen tapaan:

a) $F((A \to (B \to C)) \to ((A \to C) \to (A \to B)))^1$

$$T(A \to (B \to C))^5$$
$$F((A \to C) \to (A \to B))^2$$
$$T(A \to C)^4$$
$$F(A \to B)^3$$
$$T(A)$$
$$F(B)$$
$$\begin{array}{cc} F(A) & T(C) \\ \otimes & \begin{array}{cc} F(A) & T(B \to C)^6 \\ & \begin{array}{cc} F(B) & T(C) \end{array} \end{array} \end{array}$$

Koska taulu ei sulkeutunut, lause ei ole pätevä, joten väite ei pidä paikkaansa. Haluttu valuaatio (eli vastamalli) saadaan luettua jostain taulun avoimesta haarasta. Jos haarassa esiintyy $T(P)$, asetetaan $\mathcal{V}(P) = T$, ja jos siinä esiintyy $F(P)$, asetetaan $\mathcal{V}(P) = F$. Taulun oikeanpuolimmaisesta haarasta saadaan valuaatio $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(C) = T, \mathcal{V}(B) = F$$

b) $$
\begin{array}{c}
F((\neg B \to (A \to C)) \to (A \to B \vee C))^1 \\
T(\neg B \to (A \to C))^4 \\
F(A \to B \vee C)^2 \\
T(A) \\
F(B \vee C)^3 \\
F(B) \\
F(C) \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} F(\neg B)^5 \\ T(B) \\ \otimes \end{array} &
\begin{array}{c} T(A \to C)^6 \\ \begin{array}{cc} F(A) & T(C) \\ \otimes & \otimes \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Taulun kaikki haarat sulkeutuivat, joten lause on pätevä ja väittämä pitää paikkansa.