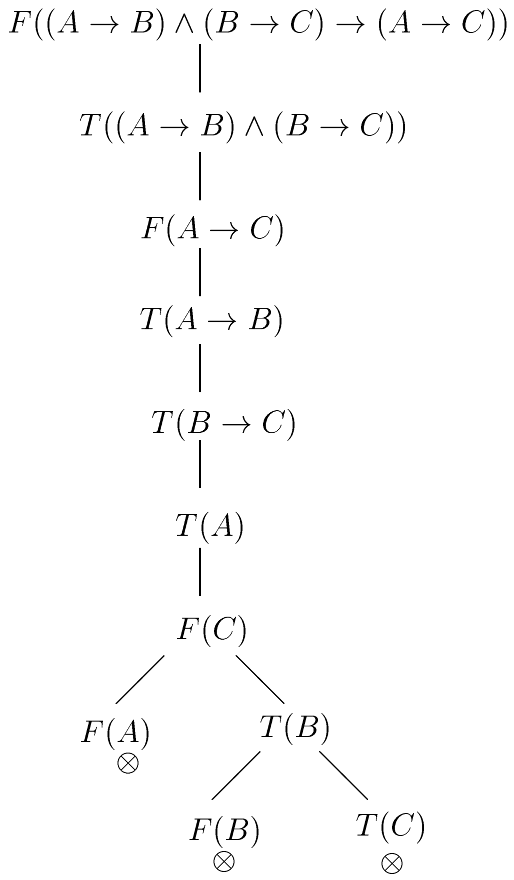
Tik-79.144 **Syksy 1999**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 3
Ratkaisut

1. Todistettavien kaavojen negaatioille konstruoidaan semanttiset taulut. Taulun kaikkien haarojen tulee sulkeutua, jotta taulun juuressa $F(\phi)$ oleva lause ϕ on pätevä. Jos taulun haara sulkeutuu ennen koko puun valmistumista, kyseistä haaraa ei enää laajenneta sääntöjä sovellettaessa.

Huomaa, että semanttista taulua käytetään itse asiassa lauseen $\neg\phi$ mallien selvittämiseen. Jos taulun kaikki haarat sulkeutuvat lauseella $\neg\phi$ ei ole mallia (eli $\neg\phi$ on toteutumaton), joten lause ϕ pätevä.

b) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$:



a) $A \to (B \to B)$:

$$F(A \to (B \to B))$$

$$T(A)$$

$$F(B \to B)$$

$$T(B)$$

$$F(B)$$

$$\otimes$$

c) $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$:

$$F((A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C))$$

$$T((A \to B) \wedge (A \to C))$$

$$F(A \to B \wedge C)$$

$$T(A \to B)$$

$$T(A \to C)$$

$$T(A)$$

$$F(B \wedge C)$$

- $F(A)$ $\otimes$
- $T(B)$
  - $F(B)$ $\otimes$
  - $F(C)$
    - $F(A)$ $\otimes$
    - $T(C)$ $\otimes$

d) $(A \to C) \wedge (B \to C) \wedge (A \vee B) \to C$:

$$F((A \to C) \wedge (B \to C) \wedge (A \vee B) \to C)$$

$$T((A \to C) \wedge (B \to C) \wedge (A \vee B))$$

$$F(C)$$

$$T((A \to C) \wedge (B \to C))$$

$$T(A \vee B)$$

$$T(A \to C)$$

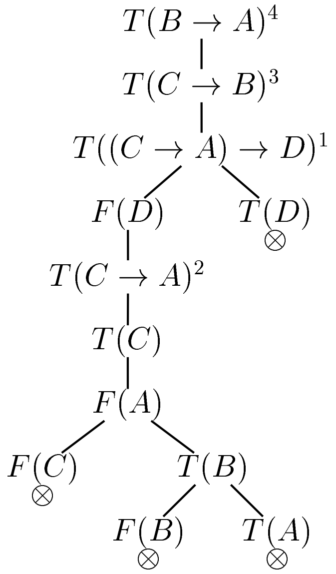
$$T(B \to C)$$

- $F(A)$
  - $F(B)$
    - $T(A)$ $\otimes$
    - $T(B)$ $\otimes$
  - $T(C)$ $\otimes$
- $T(C)$ $\otimes$

Yleisesti ottaen kannattaa hajoittaa ensin lauseet, jotka eivät haarauta taulua. Tällöin taulu jää mahdollisesti pienemmäksi. Haarojen mahdollisimman aikainen sulkeutuminen kannattaa myös huomioida säännön valinnassa.

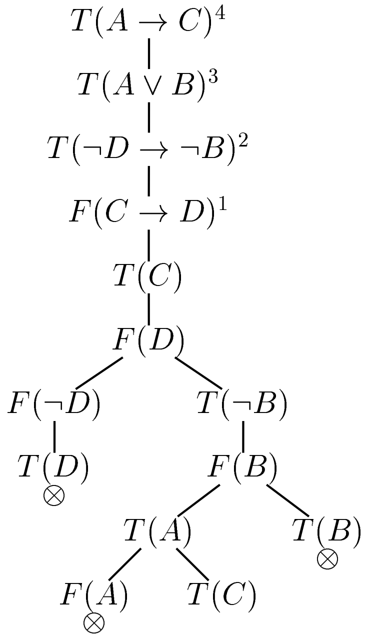
2. Loogista seuraavuutta tutkittaessa asetetaan taulun juureen kaikki lausejoukon lauseet totena ja tutkittava lause epätotena. Mikäli nyt kaikki puun haarat sulkeutuvat ristiriidan takia, tiedetään että tutkittava lause ei voi olla epätosi, mikäli kaikki lausejoukon lauseet ovat tosia, joten lause on looginen seuraavuus lausejoukosta.

a)



Koska taulu sulkeutui, on D looginen seuraus lausejoukosta.

b)



Taulu ei sulkeutunut, joten $C \to D$ ei ole looginen seuraavuus lausejoukosta. Puun aukiolevasta haarasta voidaan lukea vastaesimerkki: $\mathcal{V}(A) = T$, $\mathcal{V}(B) = F$, $\mathcal{V}(C) = T$, $\mathcal{V}(D) = F$.

3. a)

1.	$(P \to ((P \to P) \to P))$	[A1]
2.	$((P \to ((P \to P) \to P)) \to$ $((P \to (P \to P)) \to (P \to P)))$	[A2]
3.	$((P \to (P \to P)) \to (P \to P))$	[MP:1,2]
4.	$(P \to (P \to P))$	[A1]
5.	$(P \to P)$	[MP:3,4]

b)

1.	$(Q \to R)$	[P2]
2.	$((Q \to R) \to (P \to (Q \to R)))$	[A1]
3.	$(P \to (Q \to R))$	[MP:1,2]
4.	$((P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R)))$	[A2]
5.	$((P \to Q) \to (P \to R))$	[MP:3,4]
6.	$(P \to Q)$	[P1]
7.	$(P \to R)$	[MP:5,6]

c)

1.	P	[P1]
2.	$(Q \to (P \to R))$	[P2]
3.	$(P \to (Q \to P))$	[A1]
4.	$(Q \to P)$	[MP:1,3]
5.	$((Q \to (P \to R)) \to ((Q \to P) \to (Q \to R)))$	[A2]
6.	$((Q \to P) \to (Q \to R))$	[MP:2,5]
7.	$(Q \to R)$	[MP:4,6]

d) Viimeisen lauseen todistuksessa voidaan käyttää edellisiä kohtia:

1.	$((\neg P \to \neg\neg P) \to ((\neg P \to \neg P) \to P))$	[A3]
2.	$(\neg P \to \neg P)$	[(a)]
3.	$((\neg P \to \neg\neg P) \to P)$	[(c):1,2]
4.	$(\neg\neg P \to (\neg P \to \neg\neg P))$	[A1]
5.	$(\neg\neg P \to P)$	[(b):4,3]