Tik-79.144 **Syksy 1999**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 2
Ratkaisut

1. a) Käytetään atomisia lauseita $P1$, $K1$ ja $V1$, jotka tarkoittavat että liikennevalon 1 punainen, keltainen ja vihreä lamppu palaa (tässä järjestyksessä). Olkoot $P2$, $K2$ ja $V2$ vastaavat väittämät liikennevalolle 2. Käydään annetut vaatimukset lävitse:

(i) Liikennevalolle 1 saadaan lause $P1 \vee K1 \vee V1$ (ainakin yksi lampuista palaa) ja lauseet $P1 \rightarrow \neg K1 \wedge \neg V1$, $K1 \rightarrow \neg P1 \wedge \neg V1$, $V1 \rightarrow \neg P1 \wedge \neg K1$ (korkeintaan yksi lampuista palaa). Lisäksi tarvitaan vastaavat lauseet liikennevalolle 2.

(ii) Saadaan lause $\neg(V1 \wedge V2)$.

(iii) Saadaan lauseet $P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$ ja $P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$.

b) Väittämästä "molemmissa liikennevaloissa palaa keltainen lamppu" saadaan lause $K1 \wedge K2$. Olkoon $\mathcal{V}$ valuaatio, joka kuvaa atomiset lauseet $K1$ ja $K2$ todeksi (T) ja muut atomiset lauseet epätodeksi (E). Nyt $\mathcal{V}(K1 \wedge K2) = T$, koska $\mathcal{V}(K1) = T$ ja $\mathcal{V}(K2) = T$. Lisäksi kaikille (a)-kohdan lauseille α pätee $\mathcal{V}(\alpha) = T$ (tarkista). Siis $\mathcal{V}$ on malli annetuille vaatimuksille, jossa $K1 \wedge K2$ on tosi. (Mallin haussa voidaan käyttää esimerkiksi semanttista taulua).

c) Olkoon $\mathcal{V}$ valuaatio, joka kuvaa atomiset lauseet $V1$ ja $V2$ todeksi ja muut atomiset lauseet epätodeksi. Nyt $\mathcal{V}(\neg(V1 \wedge V2)) = E$, joten lausejoukko ei toteudu.

d) Yksi mahdollisuus on väljentää ensimmäistä vaatimusta, koska liikkeellelähdettäessä punainen ja keltainen lamppu palavat monissa liikennevaloissa yhtäaikaisesti (mieti, kuinka lauseita tulee muuttaa). Lauselogiikan avulla ei voi helposti esittää liikennevalojen toiminnan eri vaiheita (esim. vihreän jälkeen syttyy keltainen lamppu).

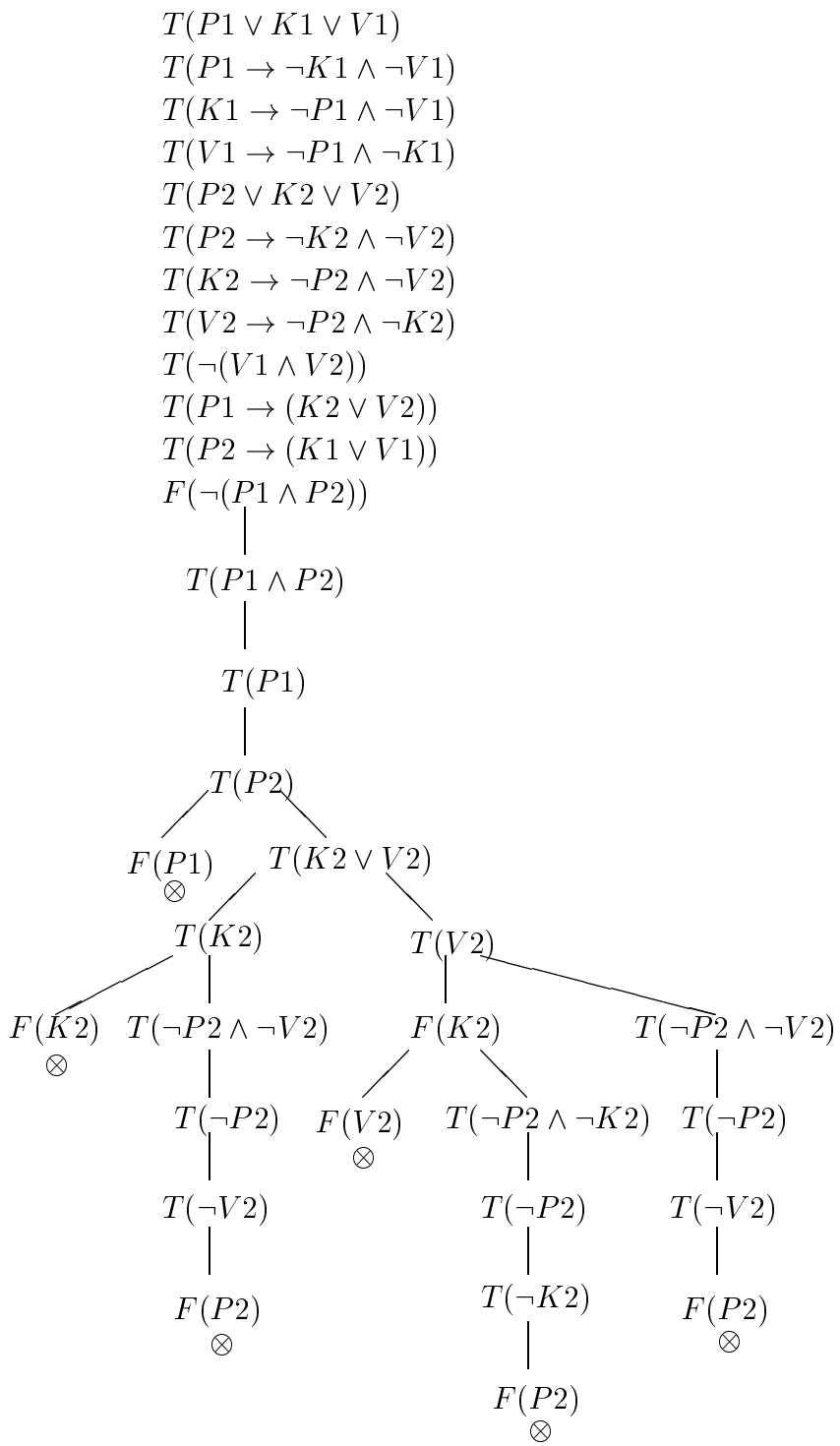
2. a) Laaditaan totuustaulu edellisen tehtävän lausejoukolle. Merkitään taulun tiivistämiseksi α_i:llä lausetta $(Pi \vee Ki \vee Vi) \wedge (Pi \rightarrow \neg Ki \wedge \neg Vi) \wedge (Ki \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Vi) \wedge (Vi \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Ki)$ (joka siis merkitsee, että liikennevalossa i palaa täsmälleen yksi lamppu). Tähdellä merkityt rivit vastaavat lausejoukon malleja.

P1	K1	V1	P2	K2	V2	α_1	α_2	$\neg(V1 \wedge V2)$	$P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$	$P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$	
E	E	E	E	E	E	E	E	T	T	T	
E	E	E	E	E	T	E	T	T	T	T	
E	E	E	E	T	E	E	T	T	T	T	
E	E	E	E	T	T	E	E	T	T	T	
E	E	E	T	E	E	E	T	T	T	E	
E	E	E	T	E	T	E	E	T	T	E	
E	E	E	T	T	E	E	E	T	T	E	
E	E	E	T	T	T	E	E	T	T	E	
E	E	T	E	E	E	T	E	T	T	T	
E	E	T	E	E	T	T	T	E	T	T	
E	E	T	E	T	E	T	T	T	T	T	*
E	E	T	E	T	T	T	E	E	T	T	
E	E	T	T	E	E	T	T	T	T	T	*
E	E	T	T	E	T	T	E	E	T	T	
E	E	T	T	T	E	T	E	T	T	T	
E	E	T	T	T	T	T	E	E	T	T	
E	T	E	E	E	E	T	E	T	T	T	
E	T	E	E	E	T	T	T	T	T	T	*
E	T	E	E	T	E	T	T	T	T	T	*
E	T	E	E	T	T	T	E	T	T	T	
E	T	E	T	E	E	T	T	T	T	T	*
E	T	E	T	E	T	T	E	T	T	T	
E	T	E	T	T	E	T	E	T	T	T	
E	T	E	T	T	T	T	E	T	T	T	

P1	K1	V1	P2	K2	V2	α_1	α_2	$\neg(V1 \wedge V2)$	$P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$	$P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$	
E	T	T	E	E	E	E	E	T	T	T	
E	T	T	E	E	T	E	T	E	T	T	
E	T	T	E	T	E	E	T	T	T	T	
E	T	T	E	T	T	E	E	E	T	T	
E	T	T	T	E	E	E	T	T	T	T	
E	T	T	T	E	T	E	E	E	T	T	
E	T	T	T	T	E	E	E	T	T	T	
E	T	T	T	T	T	E	E	E	T	T	
T	E	E	E	E	E	T	E	T	E	T	
T	E	E	E	E	T	T	T	T	T	T	*
T	E	E	E	T	E	T	T	T	T	T	*
T	E	E	E	T	T	T	E	T	T	T	
T	E	E	T	E	E	T	T	T	E	E	
T	E	E	T	E	T	T	E	T	T	E	
T	E	E	T	T	E	T	E	T	T	E	
T	E	E	T	T	T	T	E	T	T	E	
T	E	T	E	E	E	E	E	T	E	T	
T	E	T	E	E	T	E	T	E	T	T	
T	E	T	E	T	E	E	T	T	T	T	
T	E	T	E	T	T	E	E	E	T	T	
T	E	T	T	E	E	E	T	T	E	T	
T	E	T	T	E	T	E	E	E	T	T	
T	E	T	T	T	E	E	E	T	T	T	
T	E	T	T	T	T	E	E	E	T	T	
T	T	E	E	E	E	E	E	T	E	T	
T	T	E	E	E	T	E	T	T	T	T	
T	T	E	E	T	E	E	T	T	T	T	
T	T	E	E	T	T	E	E	T	T	T	
T	T	E	T	E	E	E	T	T	E	T	
T	T	E	T	E	T	E	E	T	T	T	
T	T	E	T	T	E	E	E	T	T	T	
T	T	E	T	T	T	E	E	T	T	T	
T	T	T	E	E	E	E	E	T	E	T	
T	T	T	E	E	T	E	T	E	T	T	
T	T	T	E	T	E	E	T	T	T	T	
T	T	T	E	T	T	E	E	E	T	T	
T	T	T	T	E	E	E	T	T	E	T	
T	T	T	T	E	T	E	E	E	T	T	
T	T	T	T	T	E	E	E	T	T	T	
T	T	T	T	T	T	E	E	E	T	T	

Malleja on siis 7 kappaletta ($2^6 = 64$ mahdollisuutta). Tutkimalla malleja voit huomata, että insinööri Sörsselssönin vaatimukset täyttyvät niiden määräämissä tilanteissa. Väittämä "liikennevalojen punaiset lamput eivät pala yhtäaikaisesti" voidaa esittää lauseena $\neg(P1 \wedge P2)$. Tämä lause on tosi kaikissa edellisen tehtävän lausejoukon malleissa (tarkista), joten $\neg(P1 \wedge P2)$ on kyseisen lausejoukon looginen seuraus.

b) Ratkaistaan sama tehtävä semanttisen taulun avulla. Huomaa, että johtopäätös $\neg(P1 \wedge P2)$ asetetaan epätodeksi taulussa (johtopäätöksen negaation halutaan olevan tosi). Koska taulun kaikki haarat sulkeutuvat $\Sigma \cup \{\neg(\neg(P1 \wedge P2))\}$ on toteutumaton (Σ on ensimmäisen tehtävän lausejoukko) ja siten $\neg(P1 \wedge P2)$ seuraa loogisesti Σ:sta.



Tehtävän opetuksena on, ettei totuustaulu ole kovin kätevä mallien selvittämisessä, jos atomisia lauseita on enemmälti.

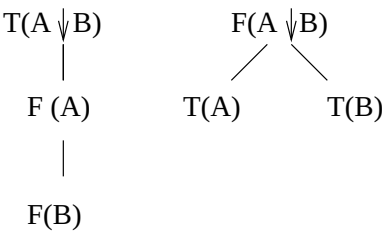
3. a) Negaatio

$$\begin{aligned} \neg A &\equiv \neg A \wedge \neg A \\ &\equiv (A \downarrow A) \end{aligned}$$

b) Disjunktio

$$\begin{aligned} A \vee B &\equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) \\ &\equiv \neg(A \downarrow B) \\ &\equiv ((A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)) \end{aligned}$$

c) Konjunktio

$$\begin{aligned} A \wedge B &\equiv \neg\neg A \wedge \neg\neg B \\ &\equiv (\neg A \downarrow \neg B) \\ &\equiv ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)) \end{aligned}$$

Semanttisen taulun säännöt saadaan vaikkapa lähtemällä liikkeelle lauseesta $(\neg A \wedge \neg B)$ ja katsomalla millainen taulu siitä muodostuu.