Tik-79.144 **Syksy 1998**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 5
Ratkaisut

1. Merkintä $\vDash \phi$ tarkoittaa sitä, että ϕ on pätevä. Molemmissa tapauksissa väitetään siis, että lauseet olisivat päteviä. Tutkitaan lauseiden pätevyys semanttisilla tauluilla tavanomaiseen tapaan:

a) $F((A \to (B \to C)) \to ((A \to C) \to (A \to B)))^1$

$T(A \to (B \to C))^5$

$F((A \to C) \to (A \to B))^2$

$T(A \to C)^4$

$F(A \to B)^3$

$T(A)$

$F(B)$

$F(A)$ ⊗ $T(C)$

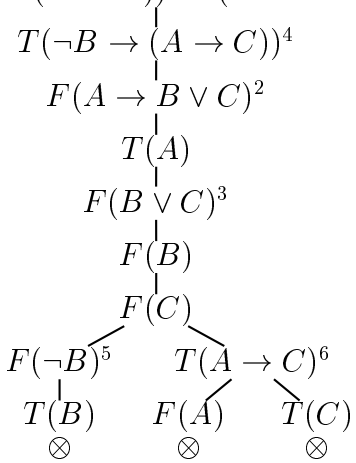
$F(A)$ $T(B \to C)^6$

$F(B)$ $T(C)$

Koska taulu ei sulkeutunut, lause ei ole pätevä, joten väite ei pidä paikkaansa. Haluttu valuaatio (eli vastamalli) saadaan luettua jostain taulun avoimesta haarasta. Jos haarassa esiintyy $T(P)$, asetetaan $\mathcal{V}(P) = T$, ja jos siinä esiintyy $F(P)$, asetetaan $\mathcal{V}(P) = F$. Taulun oikeanpuolimmaisesta haarasta saadaan valuaatio $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}(C) = T, \mathcal{V}(B) = F$$

b) $F((\neg B \to (A \to C)) \to (A \to B \vee C))^1$



Taulun kaikki haarat sulkeutuivat, joten lause on pätevä ja väittämä pitää paikkansa.

2. Mallinnetaan kemialliset reaktiot implikaatioiksi, jotka muutetaan sitten klausuulimuotoon. Tuloksena saadaan klausuulit:

(1)

$$\begin{aligned} &\mathrm{MgO} + \mathrm{H_2} \to \mathrm{Mg} + \mathrm{H_2O} \\ \Longrightarrow &\mathrm{MgO} \wedge \mathrm{H_2} \to \mathrm{Mg} \wedge \mathrm{H_2O} \\ \Longrightarrow &\neg\mathrm{MgO} \vee \neg\mathrm{H_2} \vee (\mathrm{Mg} \wedge \mathrm{H_2O}) \\ \Longrightarrow &(\neg\mathrm{MgO} \vee \neg\mathrm{H_2} \vee \mathrm{Mg}) \wedge (\neg\mathrm{MgO} \vee \neg\mathrm{H_2} \vee \mathrm{H_2O}) \end{aligned}$$

Reaktiosta syntyi siis kaksi klausuulia: $\{\neg\mathrm{MgO}, \neg\mathrm{H_2}, \mathrm{Mg}\}$ sekä $\{\neg\mathrm{MgO}, \neg\mathrm{H_2}, \mathrm{H_2O}\}$.

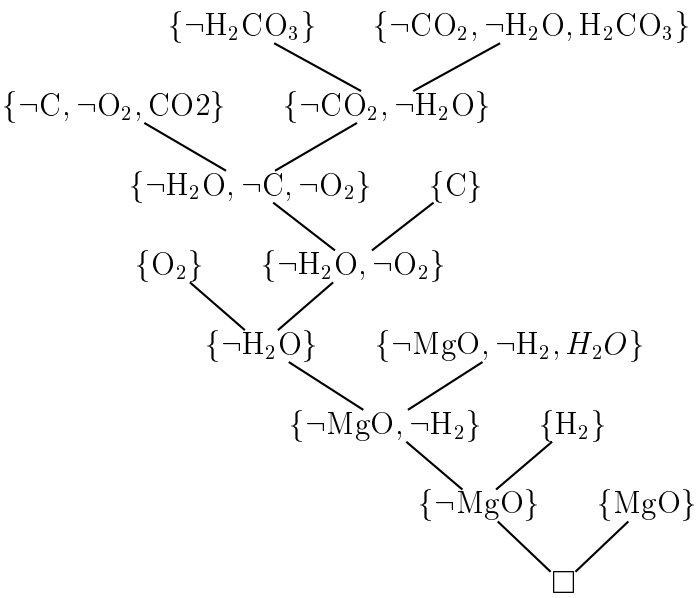
(2)

$$\begin{aligned} &\mathrm{C} + \mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2} \\ \Longrightarrow &\mathrm{C} \wedge \mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2} \\ \Longrightarrow &\neg\mathrm{C} \vee \neg\mathrm{O_2} \vee \neg\mathrm{CO_2} \Longrightarrow \quad \{\neg\mathrm{C}, \neg\mathrm{O_2}, \neg\mathrm{CO_2}\} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} &\mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O} \to \mathrm{H_2CO_3} \\ \Longrightarrow &\mathrm{CO_2} \wedge \mathrm{H_2O} \to \mathrm{H_2CO_3} \\ \Longrightarrow &\neg\mathrm{CO_2} \vee \neg\mathrm{H_2O} \vee \neg\mathrm{H_2CO_3} \Longrightarrow \quad \{\neg\mathrm{CO_2} \vee \neg\mathrm{H_2O} \vee \neg\mathrm{H_2CO_3}\} \end{aligned}$$

Lisäksi lähtöaineista saadaan neljän klausuulin joukko:

$$\begin{aligned} &\mathrm{MgO} \wedge \mathrm{H_2} \wedge \mathrm{O_2} \wedge \mathrm{C} \\ \Longrightarrow &\{\mathrm{MgO}\}, \{\mathrm{H_2}\}, \{\mathrm{O_2}\}\{\mathrm{C}\} \end{aligned}$$

Merkitään ylläolevaa klausuuliijoukkoa Σ. Nyt halutaan todistaa, että $\Sigma \vDash \mathrm{H_2CO_3}$. Todistus tehdään osoittamalla, että $\Sigma \cup \{\neg \mathrm{H_2CO_3}\}$ on toteutumaton: