Tik-79.144 **Syksy 1998**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 3
Ratkaisut

1. Todistettavien kaavojen negaatioille konstruoidaan semanttiset taulut. Taulun kaikkien haarojen tulee sulkeutua, jotta taulun juuressa $F(\phi)$ oleva lause ϕ on pätevä. Jos taulun haara sulkeutuu ennen koko puun valmistumista, kyseistä haaraa ei enää laajenneta sääntöjä sovellettaessa.

Huomaa, että semanttista taulua käytetään itse asiassa lauseen $\neg\phi$ mallien selvittämiseen. Jos taulun kaikki haarat sulkeutuvat lauseella $\neg\phi$ ei ole mallia (eli $\neg\phi$ on toteutumaton), joten lause ϕ pätevä.

b) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$:

$$
\begin{array}{c}
F((A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)) \\
| \\
T((A \to B) \wedge (B \to C)) \\
| \\
F(A \to C) \\
| \\
T(A \to B) \\
| \\
T(B \to C) \\
| \\
T(A) \\
| \\
F(C) \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\begin{array}{c} F(A) \\ \otimes \end{array} & \begin{array}{c} T(B) \\ \begin{array}{cc} / & \backslash \\ \begin{array}{c} F(B) \\ \otimes \end{array} & \begin{array}{c} T(C) \\ \otimes \end{array} \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

a) $A \to (B \to B)$:

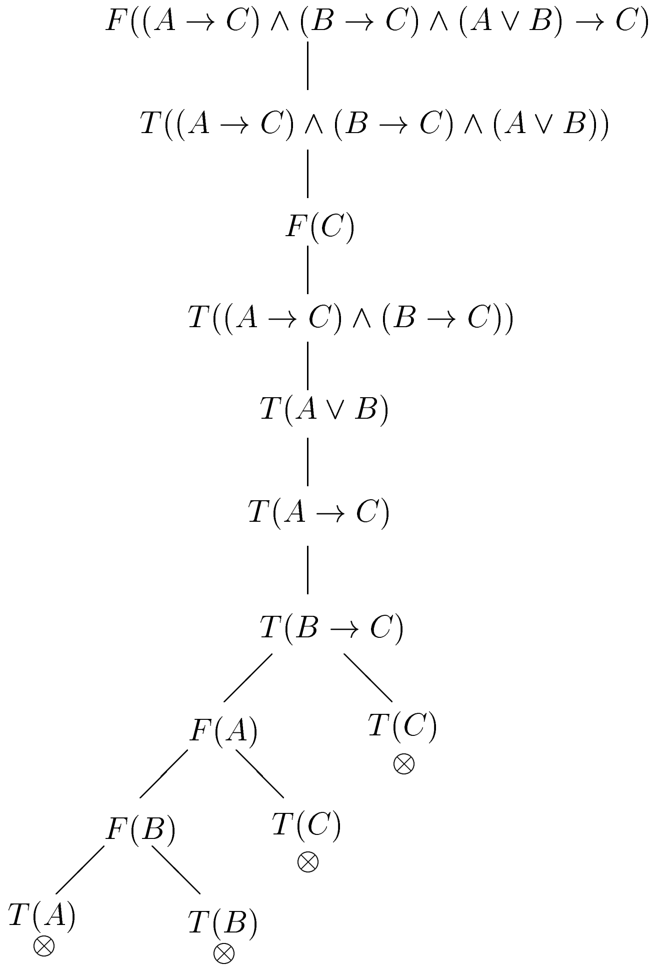
$$F(A \to (B \to B))$$
$$T(A)$$
$$F(B \to B)$$
$$T(B)$$
$$F(B)$$
$$\otimes$$

c) $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$:

$$F((A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C))$$
$$T((A \to B) \wedge (A \to C))$$
$$F(A \to B \wedge C)$$
$$T(A \to B)$$
$$T(A \to C)$$
$$T(A)$$
$$F(B \wedge C)$$

- $F(A)$ $\otimes$
- $T(B)$
  - $F(B)$ $\otimes$
  - $F(C)$
    - $F(A)$ $\otimes$
    - $T(C)$ $\otimes$

d) $(A \to C) \wedge (B \to C) \wedge (A \vee B) \to C$:



Yleisesti ottaen kannattaa hajoittaa ensin lauseet, jotka eivät haarauta taulua. Tällöin taulu jää mahdollisesti pienemmäksi. Haarojen mahdollisimman aikainen sulkeutuminen kannattaa myös huomioida säännön valinnassa.

2. a) Poistetaan lauseesta ensin ekvivalenssit ja implikaatiot ja viedään negaatiot atomisten lauseiden eteen (De Morganin säännöt ja kaksoisnegaation eliminointisääntö).

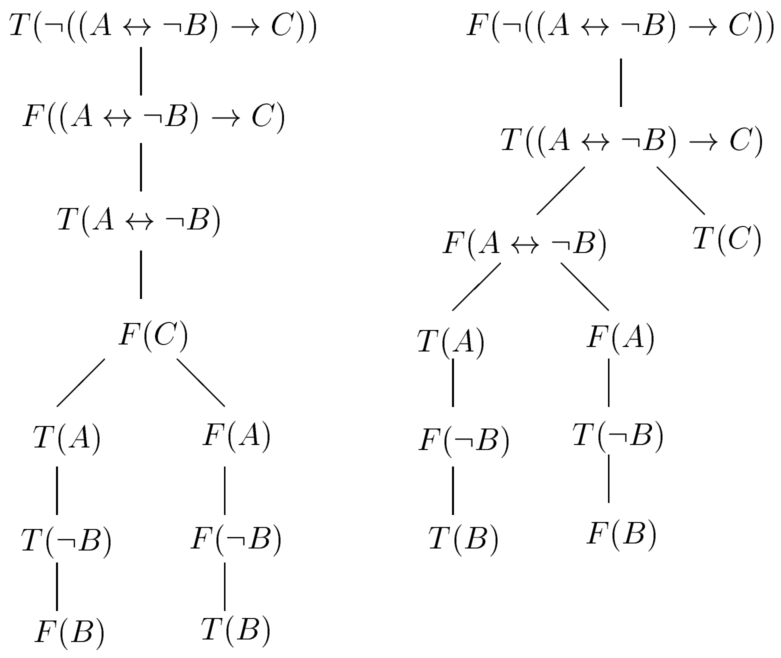
$$
\begin{aligned}
&\neg((A \leftrightarrow \neg B) \to C) \\
&\qquad \equiv \neg((A \to \neg B) \wedge (\neg B \to A) \to C) && [\leftrightarrow e] \\
&\qquad \equiv \neg(\neg((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg\neg B \vee A)) \vee C) && [\to e] \\
&\qquad \equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) \wedge \neg C \ (*) && [\neg\neg e, DM]
\end{aligned}
$$

Tämä onkin jo konjuntiivinen normaalimuoto. Käytetään seuraavaksi konjunktion distributiivisuutta disjunktion yli:

$$\begin{aligned}
(*) &\equiv (\neg A \vee \neg B) \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg C)) \\
&\equiv (\neg A \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg C))) \vee \\
&\quad\ (\neg B \wedge ((B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg C))) \\
&\equiv (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge A \wedge \neg C) \vee \\
&\quad\ (\neg B \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge A \wedge \neg C) \\
&\equiv (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C)
\end{aligned}$$

Lause on disjunktiivisessa normaalimuodossa. Viimeisessä vaiheessa on jätetty loogisesti epätodet literaalien konjuktiot pois (ts. ne, joissa esiintyy jokin atominen lause ja sen negaatio).

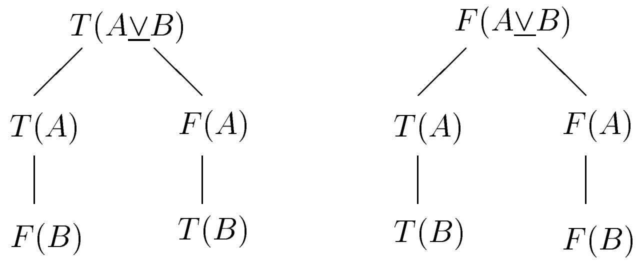
b) Taulumenetelmällä on helppo hakea lauseelle mallit, joista voidaan edelleen muodostaa lauseelle disjunktiivinen normaalimuoto. Konstruoidaan lauseelle ja sen negaatiolle semanttiset taulut:



Disjunktiivinen normaalimuoto voidaan nyt lukea ensimmäisen taulun *avoimista* haaroista: $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$. Normaalimuotoon tulee siis yksi konjunktio kutakin taulun avointa haaraa kohden. Jos haarassa on solmu $T(A)$, konjunktioon otetaan lause A ja jos haarassa on solmu $F(A)$, konjunktioon otetaan lause $\neg A$.

Lauseen negaatiolle saadaan toisesta taulusta disjunktiivinen normaalimuoto $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee C$. Muodostamalla tämän lauseen negaatio $\neg((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee C)$ saadaan alkuperäisen lauseen kanssa ekvivalentti lause (kaksoisnegaation poisto). De Morganin sääntöjen avulla lause saadaan muotoon $(\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B) \wedge \neg C$, joka on alkuperäisen lauseen konjunktiivinen normaalimuoto. Huomaa, että (a)- ja (b)-kohdissa saadut normaalimuodot ovat samat (ainoa ero on alilauseiden järjestyksessä).

3. Koska poissulkeva disjunktio $A \underline{\vee} B$ on ekvivalentti lauseen $A \leftrightarrow \neg B$ kanssa, säännöt tulee määritellä seuraavasti:



Siis jotta $A \underline{\vee} B$ olisi tosi, on A:n oltava tosi ja B:n epätosi tai A:n on oltava epätosi ja B:n tosi. Vastaavasti $A \underline{\vee} B$ on epätosi, jos molemmat lauseet ovat tosia tai epätosia. Käytetään uutta sääntöä lauseen $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \underline{\vee} B)$ todistuksessa:

$$F(\neg A \wedge \neg B \to \neg(A \underline{\vee} B))$$

$$T(\neg A \wedge \neg B)$$

$$F(\neg(A \underline{\vee} B))$$

$$T(A \underline{\vee} B)$$

$$T(\neg A)$$

$$T(\neg B)$$

$$F(A)$$

$$F(B)$$

$$\begin{array}{cc} T(A) & F(A) \\ F(B) & T(B) \\ \otimes & \otimes \end{array}$$