Unifioijat

Olkoon $S = \{E_1, \ldots, E_n\}$ joukko termejä (tai literaaleja tms.). Substituutio θ on S:n *unifioija*, jos $E_1\theta = E_2\theta = \cdots = E_n\theta$.

Jos S:lle on unifioija, on S *unifioituva*.

Esimerkki.

joukko	unifioija
$\{P(x, f(a)), P(y, z)\}$	$\{y/x, z/f(a)\}$ tai $\{x/y, z/f(a)\}$
$\{P(x, f(x)), P(f(a), y)\}$	$\{x/f(a), y/f(f(a))\}$
$\{P(a), P(f(x))\}$	ei unifioijaa
$\{P(x), P(f(x))\}$	ei unifioijaa (termit aina äärellisiä)

Joukon $\{E_1, \ldots, E_n\}$ unifioija σ on *yleisin unifioija*, jos jokaiselle ko. joukon unifioijalle θ on olemassa substituutio λ siten että $\theta = \sigma\lambda$.

Esimerkki. Joukon $L = \{P(x, f(y)), P(a, z)\}$ unifioijia ovat mm.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \{x/a, z/f(b), y/b\} \\ \lambda_2 &= \{x/a, z/f(y)\} \end{aligned}$$

λ_2 on L:n yleisin unifioija:

$$\lambda_1 = \lambda_2\{y/b\}$$

Väite. Olkoot θ ja σ joukon S yleisimpiä unifioijia. Tällöin on olemassa nimeämissubstituutio λ siten että $S\theta\lambda = S\sigma$.

Unifikaatioalgoritmi

Erojoukko $D(S)$ ei-tyhjälle joukolle atomikaavoja S on

1. ensimmäiset eroavat termit, tai
2. jos predikaattisymbolit eivät samoja, atomikaavat itse.

Esimerkki. Joukon $S = \{P(x), Q(y)\}$ erojoukko $D(S) = S$.

Joukon $S = \{P(x, y), P(x, g(z))\}$ erojoukko $D(S) = \{y, g(z)\}$.

Unifikaatioalgoritmi:

1. $k := 0$, $S_k := S$ ja $\sigma_k := \epsilon$
2. Jos S_k on yksialkioinen joukko, lopeta algoritmin suoritus: S on unifioituva.
   Muussa tapauksessa etsi S_k:n erojoukko $D(S_k)$.
3. Jos $D(S_k)$:ssa on alkiot v_k ja t_k siten että v_k on muuttuja, joka ei esiinny t_k:ssa, mene kohtaan 4. Muussa tapauksessa lopeta algoritmin suoritus: S ei ole unifioituva.
4. $\sigma_{k+1} := \{v_k/t_k\}$ ja $S_{k+1} := S_k\{v_k/t_k\}$.
5. $k := k + 1$ ja mene kohtaan 2.

Väite. Olkoon S äärellinen ei-tyhjä joukko atomikaavoja:

- jos S on unifioituva, niin unifikaatioalgoritmin laskenta päättyy askeleen 2 kohdalla ja $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \ldots \sigma_k$ on S:n yleisin unifioija
- jos S ei ole unifioituva, niin unifikaatioalgoritimin laskenta päättyy askeleen 3 lopuksi.

Esimerkki. Lasketaan unifikaatioalgoritmilla joukon $S = \{P(x, f(x)), P(g(a), z)\}$ yleisin unifioija.

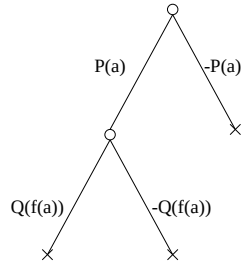
1. $S_0 = \{P(x, f(x)), P(g(a), z)\}, \sigma_0 = \epsilon$
2. $D(S_0) = \{x, g(a)\}$
3. alkio $v_0 = x$ ja $t_0 = g(a)$
4. $\sigma_1 = \{x/g(a)\}, S_1 = \{P(g(a), f(g(a))), P(g(a), z)\}$
2. $D(S_1) = \{f(g(a)), z\}$
3. alkio $v_1 = z$ ja $t_1 = f(g(a))$
4. $\sigma_2 = \{z/f(g(a))\}$, $S_2 =$ $\{P(g(a), f(g(a))), P(g(a), f(g(a))) = \{P(g(a), f(g(a)))\}$
2. S_2 on yksialkioinen, joten S on unifioituva.

Yleisin unifioija on $\sigma = \sigma_0\sigma_1\sigma_2 = (\epsilon\{x/g(a)\})\{z/f(g(a))\} = \{x/g(a), z/f(g(a))\}$ ja $S\sigma = \{P(g(a), f(g(a)))\}$.

Huono ratkaisuproseduuri

1. Muutetaan ϕ:n negaatio klausuulijoukoksi S. Esim. $(\exists y \forall x\ (P(x, y) \wedge P(f(x), x))) \rightarrow (\forall x \exists y\ P(x, y))$ joukoksi $S = \{\{\neg P(c_1, x)\}, \{P(x, c_2)\}, \{P(f(x), x)\}\}$.
2. Tuotetaan joukkoja $H_0 = \{c_1, c_2\}$, $H_1 = \{c_1, c_2, f(c_1), f(c_2)\}$ $\ldots$ $H_\infty = \{c_1, c_2, f(c_1), f(c_2), f(f(c_1)), f(f(c_2)), \ldots\}$
3. Tuotetaan joukkoja S_i, missä S_i on saatu S:stä korvaammalla S:n muuttujat termeillä joukosta H_i. Hebrandin teoreeman perusteella jollain askeleella j joukko S_j on toteutumaton joss S on toteutumaton.

Esimerkki. $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(x), Q(f(x))\}, \{\neg Q(f(a))\}\}$.



Puu olisi pienempi jos $\times$-solmujen isä olisi $\times$-solmu. Näin olisi, jos joukkoon S kuuluisi klausuuleista $\{\neg Q(f(a))\}$ ja $\{\neg P(x), Q(f(x))\}$ saatava klausuuli $\{\neg P(a)\}$.

Predikaattilogiikan resoluutiosääntö

Olkoot C_1 ja C_2 klausuuleja, joissa *ei ole yhteisiä* muuttujia, ja jotka ovat muotoa $C_1' \sqcup \{P(\vec{t_1}), P(\vec{t_2}), \ldots, P(\vec{t_n})\}$ ja
$C_2' \sqcup \{\neg P(\vec{s_1}), \neg P(\vec{s_2}), \ldots, \neg P(\vec{s_m})\}$.

Jos σ on joukon $\{P(\vec{t_1}), P(\vec{t_2}), \ldots, P(\vec{t_n}), P(\vec{s_1}), P(\vec{s_2}), \ldots, P(\vec{s_m})\}$ yleisin unifioija (MGU), niin $C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$ on C_1:n ja C_2:n resolventti.

Huom. merkintä $A \sqcup B$ tarkoittaa keskenään alkiovieraiden ($A \cap B = \emptyset$) joukkojen A ja B unionia $A \cup B$.

Esimerkki

Olkoot

$$\begin{aligned} C_1 &= \{Q(x), \neg R(y), P(x,y), P(f(z), f(z))\} \\ C_2 &= \{\neg N(u), \neg R(w), \neg P(f(a), f(a)), \neg P(f(w), f(w))\} \end{aligned}$$

Joukon $\{P(x,y), P(f(z), f(z)), P(f(a), f(a)), P(f(w), f(w))\}$ yleisin unifioija on $\sigma = \{x/f(a), y/f(a), z/a, w/a\}$.

Klausuulien resolventti on $\{Q(f(a)), \neg R(f(a)), \neg N(u), \neg R(a)\}$.

Resoluution virheettömyys ja täydellisyys

Väite. Klausuulijoukko S on toteutumaton jos ja vain jos S:stä päästään resoluutiosäännöllä tyhjään klausuuliin $\square$.

Tämän perusteella resoluutiota voidaan käyttää pätevyyden $\models \phi$ ja loogisen seuraavuuden $\Sigma \models \phi$ osoittamiseen/tutkimiseen:

Väite. $\models \phi$ jos ja vain jos lauseen $\neg\phi$ klausuulimuodosta saadaan resoluutiolla tyhjä klausuuli $\square$.

Väite. $\Sigma \models \phi$ jos ja vain jos lausejoukon $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ klausuulimuodosta saadaan resoluutiolla tyhjä klausuuli $\square$.

Huomaa, että yllämainitun lausejoukon $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ lauseet voidaan saattaa klausuulimuotoon erikseen!!! Resoluutiossa käytetään lauseista saatavien klausuulijoukkojen unionia.

Osoita $P(a) \wedge \neg Q(a) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ toteutumattomaksi.

1. $\{P(a)\}$	P
2. $\{\neg Q(a)\}$	P
3. $\{\neg P(x), Q(x)\}$	P
4. $\{Q(a)\}$	1, 3, MGU $\{x/a\}$
5. $\square$	2, 4, MGU ϵ

Osoita $\models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$.

$$\begin{aligned} \neg(\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)) &\Rightarrow \neg(\neg\forall x P(x) \vee \exists x P(x)) \\ &\Rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x \neg P(x) \\ &\Rightarrow \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1) \wedge \neg P(x_2)) \end{aligned}$$

Saadaan klausuulijoukko $S = \{\{P(x_1)\}, \{\neg P(x_2)\}\}$.

Klausuuleista $\{P(x_1)\}$ ja $\{\neg P(x_2)\}$ saadaan $\square$ (MGU $\{x_1/x_2\}$).

Osoita $\{\forall x(I(x) \to E(x)), \exists x(I(x) \wedge K(x))\} \models \exists x(E(x) \wedge K(x))$.

Saatetaan lauseet klausuulimuotoon:

$$\begin{array}{rcl}
\forall x(I(x) \to E(x)) & \Rightarrow & \forall x(\neg I(x) \vee E(x)) \\
& \Rightarrow & \{\neg I(x), E(x)\}. \\
\exists x(I(x) \wedge K(x)) & \Rightarrow & I(c) \wedge K(c) \\
& \Rightarrow & \{I(c)\}, \{K(c)\} \\
\neg\exists x(E(x) \wedge K(x)) & \Rightarrow & \forall x \neg(E(x) \wedge K(x)) \\
& \Rightarrow & \forall x(\neg E(x) \vee \neg K(x)) \\
& \Rightarrow & \{\neg E(x), \neg K(x)\}
\end{array}$$

Kokonaisuutena saadaan siis klausuulijoukko
$S = \{\{\neg I(x), E(x)\}, \{I(c)\}, \{K(c)\}, \{\neg E(x), \neg K(x)\}\}$.

1. $\{\neg I(x), E(x)\}$	P
2. $\{I(c)\}$	P
3. $\{K(c)\}$	P
4. $\{\neg E(y), \neg K(y)\}$	P $\{x/y\}$
5. $\{\neg I(y), \neg K(y)\}$	1, 4, MGU $\{x/y\}$
6. $\{\neg K(c)\}$	2, 5, MGU $\{y/c\}$
7. $\square$	3, 6, MGU ϵ

Huom. Klausuulin 4 muuttuja x on uudelleennimetty muuttujaksi y, koska resoluutiosääntö edellyttää tätä.

Unifioijien kompositio on $\{x/c, y/c\}$.

Kerrossaturaatiostrategia

$$\begin{array}{rcl}
S_0 & = & S \\
S_i & = & \{C \mid C \text{ saadaan resoluutiolla klausuuleista} \\
& & \quad C_1 \in S_0 \cup \cdots \cup S_{i-1} \text{ ja } C_2 \in S_{i-1}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
S_0 & = & \{\{\neg I(x), E(x)\}, \{I(c)\}, \{K(c)\}, \{\neg E(y), \neg K(y)\}\} \\
S_1 & = & \{\{E(c)\}, \{\neg E(c)\}, \{\neg I(x), \neg K(x)\}\} \\
S_2 & = & \{\square, \{\neg I(c)\}, \{\neg K(c)\}\} \\
S_3 & = & \{\square\} \\
S_4 & = & \{\}
\end{array}$$

Tukijoukkostrategia

Määritelmä. S:n osajoukko T on *tukijoukko* (set-of-support), jos $S - T$ on toteutuva.

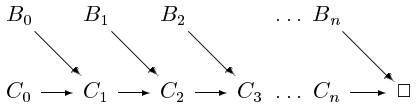
Tukijoukkostrategiassa ei milloinkaan suoriteta resoluutiota joukon $S - T$ klausuuleille keskenään.

Ajatus: olettamusten joukko on toteutuva. T on johdettavaa lausetta vastaavien klausuulien joukko, $S - T$ olettamuksia vastaavat klausuulit.

Väite. Tukijoukkoresoluutio on täydellinen strategia.

Alla klausuuli 4 muodostaa tukijoukon.

1. $\{\neg I(x), E(x)\}$	P
2. $\{I(c)\}$	P
3. $\{K(c)\}$	P
4. $\{\neg E(y), \neg K(y)\}$	P $\{x/y\}$
5. $\{\neg E(c)\}$	3, 4, MGU $\{y/c\}$
6. $\{\neg I(c)\}$	1, 5, MGU $\{x/c\}$
7. $\square$	2, 6, MGU ϵ

Lineaarinen resoluutio

Olkoon S klausuulijoukko. Alla oleva on johto lineaarisella resoluutiolla, jos C_0 on S:n klausuuli (mahdollisesti uudelleennimettynä) ja kukin B_i on joko S:n tai joukon $\{C_0, \ldots, C_{i-1}\}$ klausuuli (mahdollisesti uudelleennimettynä).