Hilbert-tyyppinen aksiomatisointi

Aksiomat:

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3. $(\neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
4. $(\forall x)\alpha(x) \to \alpha(t)$ kaikille termeille t (sijoitettavissa α:aan)
5. $(\forall x)(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\forall x)\beta)$, jos x ei esiinny α:ssa vapaana

Päättelysäännöt: $\dfrac{\alpha \to \beta \quad \alpha}{\beta}$ (MP) $\dfrac{\alpha}{(\forall x)\alpha}$ (Yleistys)

Määritelmä. Olkoon Σ joukko lauseita.

Todistus Σ:sta on jono kaavoja $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ siten, että kaikille $i \in \{1, \ldots, n\}$

- $\alpha_i \in \Sigma$,
- α_i on aksioma, tai
- α_i on saatu päättelysäännöllä aikaisemmista kaavoista.

Lause α on *johdettavissa* lausejoukosta Σ (merkitään $\Sigma \vdash \alpha$), jos on olemassa todistus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ lausejoukosta Σ siten, että $\alpha = \alpha_n$.

Lause α on *teoreema/todistuva* (merkitään $\vdash \alpha$), jos se on johdettavissa tyhjästä lausejoukosta $\Sigma = \emptyset$.

Esimerkki

1.	$P(x) \to ((P(x) \to P(x)) \to P(x))$	Ax1
2.	$(P(x) \to ((P(x) \to P(x)) \to P(x)))$ $\to ((P(x) \to (P(x) \to P(x))) \to (P(x) \to P(x)))$	Ax2
3.	$(P(x) \to (P(x) \to P(x))) \to (P(x) \to P(x))$	MP,1,2
4.	$P(x) \to (P(x) \to P(x))$	Ax1
5.	$P(x) \to P(x)$	MP,3,4
6.	$\forall x(P(x) \to P(x))$	Yleistys,5

Prenex-normaalimuoto

Predikaattilogiikan lause α joka on muotoa $\mathcal{Q}_1 x_1 \mathcal{Q}_2 x_2 \cdots \mathcal{Q}_n x_n \phi$, missä kukin $\mathcal{Q}_i$ on kvanttori ($\forall$ tai $\exists$), ja ϕ ei sisällä kvanttoreita, on *prenex*-normaalimuodossa.

Esimerkki.

$\forall x P(x)$ $\qquad$ $\forall x \exists y\ P(x, y)$

$\forall x \exists y \forall z \forall w (P(x, y, z) \to (Q(y, z, w) \to R(z, w, x)))$ $\qquad$ $P(a)$

Väite. Jokainen predikaattilogiikan lause on loogisesti ekvivalentti jonkin prenex-normaalimuodossa olevan lauseen kanssa.

Lauseiden muuttaminen prenex-normaalimuotoon

Poistetaan konnektiivit $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$:

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow \psi \quad &\Rightarrow \quad \neg\phi \vee \psi \\ \phi \leftrightarrow \psi \quad &\Rightarrow \quad (\neg\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg\psi) \end{aligned}$$

Negaatiot sisään, kvanttorit ulos (z on uusi muuttuja):

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \vec{\mathcal{Q}}x\neg\forall y\varphi & \Rightarrow & \vec{\mathcal{Q}}x\exists y\neg\varphi & \vec{\mathcal{Q}}x\neg\exists y\varphi & \Rightarrow & \vec{\mathcal{Q}}x\forall y\neg\varphi \\ \neg\neg\varphi & \Rightarrow & \varphi & \neg(\varphi \vee \psi) & \Rightarrow & \neg\varphi \wedge \neg\psi \\ \neg(\varphi \wedge \psi) & \Rightarrow & \neg\varphi \vee \neg\psi & \vec{\mathcal{Q}}x(\forall y\varphi \vee \psi) & \Rightarrow & \vec{\mathcal{Q}}x\forall z(\varphi(y/z) \vee \psi) \end{array}$$

Viimeisestä säännöstä tarvitaan versiot, joissa disjunktit ovat päinvastaisessa järjestyksessä, joissa $\forall$:in tilalla $\exists$, ja jossa disjunktion sijasta konjunktio (7 sääntöä lisää).

Esimerkki

$\neg\forall x(P(x) \rightarrow \exists z\ R(z,x)) \vee \exists x\ Q(x)$

$\neg\forall x(\neg P(x) \vee \exists z\ R(z,x)) \vee \exists x\ Q(x)$

$\exists x\neg(\neg P(x) \vee \exists z\ R(z,x)) \vee \exists x\ Q(x)$

$\exists x(\neg\neg P(x) \wedge \neg\exists z\ R(z,x)) \vee \exists x\ Q(x)$

$\exists x(P(x) \wedge \forall z\neg R(z,x)) \vee \exists x\ Q(x)$

$\exists x_1(\exists x(P(x) \wedge \forall z\neg R(z,x)) \vee Q(x_1))$

$\exists x_1\exists x_2((P(x_2) \wedge \forall z\neg R(z,x_2)) \vee Q(x_1))$

$\exists x_1\exists x_2(\forall z_1(P(x_2) \wedge \neg R(z_1,x_2)) \vee Q(x_1))$

$\exists x_1\exists x_2\forall z_1((P(x_2) \wedge \neg R(z_1,x_2)) \vee Q(x_1))$

Konjunktiivinen normaalimuoto predikaattilogiikassa

Määritelmä. Predikaattilogiikan lause on konjunktiivisessa normaalimuodossa, kun se on prenex-normaalimuodossa, ja sen kvanttoreita sisältämätön osa on muotoa $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$, missä kukin ϕ_i on literaalien $l_1, \ldots, l_{m_i}$ disjunktio $l_1 \vee \cdots \vee l_{m_i}$. (Literaalit ovat atomikaavoja tai niiden negaatioita).

Esim.
$\forall x\exists y\forall z((\neg P(x,y) \vee Q(y,x)) \wedge R(z) \wedge (\neg R(x) \vee P(y,z) \vee Q(x,z)))$

Esimerkki jatkuu

Lause on muutettu prenex-normaalimuotoon, josta jatketaan konjunktiiviseen normaalimuotoon.

$\neg\forall x(P(x) \rightarrow \exists z\ R(z,x)) \vee \exists x\ Q(x)$

$\vdots$

$\exists x_1\exists x_2\forall z_1((P(x_2) \wedge \neg R(z_1,x_2)) \vee Q(x_1))$

$\exists x_1\exists x_2\forall z_1((P(x_2) \vee Q(x_1)) \wedge (\neg R(z_1,x_2) \vee Q(x_1)))$

Eksistenssikvanttorien eliminointi

- Summafunktiolla on vasen identiteetti: $\exists x \forall y (x + y = y)$
  Esitellään symboli tälle identiteettialkiolle: $\forall y (0 + y = y)$
- Jokaisella kokonaisluvulla on vastaluku: $\forall x \exists y (x + y = 0)$
  Esitellään vastalukufunktio $-x$: $\forall x (x + -x = 0)$

Skolemointi

Olkoon $\vec{\mathcal{Q}} x \phi$ prenex-normaalimuodossa.

Sisältäköön $\vec{\mathcal{Q}} x$ kvanttorin $\exists x_i$, ja $\exists x_i$:tä edeltää universaalikvanttorit $\forall x_{n_1}, \forall x_{n_2}, \ldots, \forall x_{n_m}$.

Poista kvanttori $\exists x_i$, ja korvaa x_i:n jokainen esiintymä termillä $f(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_m})$, missä f on uusi funktiosymboli.

Jos $\exists x_i$:tä ei edellä ainutkaan universaalikvanttori, korvataan x_i uudella vakiolla c.

Esimerkkejä

$$
\begin{array}{rcl}
\exists x\ P(x) & \Rightarrow & P(c) \\
\exists x \forall y\ P(x,y) & \Rightarrow & \forall y\ P(c,y) \\
\forall x \exists y\ P(x,y) & \Rightarrow & \forall x\ P(x, f(x)) \\
\forall x \exists y \forall z \exists w\ P(w,z,y,x) & \Rightarrow & \forall x \forall z\ P(g(x,z), z, f(x), x) \\
\exists x \exists y \forall z\ P(x,y,z) & \Rightarrow & \forall z\ P(c_1, c_2, z) \\
\forall x \exists y \exists z\ P(x,y,z) & \Rightarrow & \forall x\ P(x, f_1(x), f_2(x))
\end{array}
$$

Skolemoinnin ominaisuudet

Väite. Prenex-normaalimuodossa oleva lause φ on toteutuva jos ja vain jos sen skolemoitu muoto φ' on toteutuva.

Huom. Prenex-normaalimuodossa olevan lauseen φ skolemoitu muoto φ' **ei aina ole** loogisesti ekvivalentti φ:n kanssa.

Esimerkki. Lause $\exists x P(x)$ ja sen skolemoitu muoto $P(c)$.

Nyt $\models P(c) \to \exists x\ P(x)$, mutta $\not\models \exists x P(x) \to P(c)$.

Vastamalli $\mathcal{A}$: universumi $A = \{1, 2\}$, $c^{\mathcal{A}} = 1$, $d^{\mathcal{A}} = 2$ ja $P^{\mathcal{A}} = \{2\}$.
Nyt $\mathcal{A} \models \exists x P(x)$, mutta $\mathcal{A} \not\models P(c)$.

Täten myös $\not\models \exists x\ P(x) \leftrightarrow P(c)$.

Lauseiden klausuulimuoto predikaattilogiikassa

lause $\Rightarrow$ prenex-normaalimuoto
$\Rightarrow$ konjunktiivinen normaalimuoto
$\Rightarrow$ skolemoidaan
$\Rightarrow$ klausuuliesitys (joukko literaalien joukkoja)

Esimerkki. Haetaan klausuuliesitys lauseelle
$\forall x(\neg(P(x) \rightarrow \forall y Q(x,y)) \vee R(x))$:

$\Rightarrow$ $\forall x \exists z((P(x) \wedge \neg Q(x,z)) \vee R(x))$
$\Rightarrow$ $\forall x \exists z((P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg Q(x,z) \vee R(x)))$
$\Rightarrow$ $\forall x((P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg Q(x,f(x)) \vee R(x)))$
$\Rightarrow$ $\{\{P(x), R(x)\}, \{\neg Q(x,f(x)), R(x)\}\}$

Huom! Jos lause on muodoltaan *konjunktio* $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$, on mahdollista viedä lauseet ϕ_1, ..., ϕ_n klausuulimuotoon *erikseen.*

Esimerkki. $\forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)$. Konjunktion alilauseille saadaan klausuuliesitykset $\{\{P(x)\}\}$ ja $\{\{Q(c)\}\}$ ja näinollen koko lauseen klausuuliesitys on näiden unioni $\{\{P(x)\}, \{Q(c)\}\}$.

Huom! Existenssikvanttorit kannattaa tuoda ulos lauseen rakenteesta ennen universaalikvanttoreita (mikäli mahdollista).

Esimerkki. Siis $\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$ kirjoitetaan muotoon $\exists y_1 \forall x_1(P(x_1) \vee Q(y_1))$ eikä muotoon $\forall x_1 \exists y_1(P(x_1) \vee Q(y_1))$.

Näin ehkä vältetään Skolem-funktioiden käyttöönotto (tai ainakin vähennetään Skolem-funktioiden argumenttien lukumäärää) $\Rightarrow$ klausuulimuodosta tulee rakenteeltaan yksinkertaisempi.

Herbrand-struktuurit

Kielen $\mathcal{L}$ muuttujattomien termien joukko on kielen $\mathcal{L}$ *Herbrand-universumi.*

Herbrand-struktuuri kielelle $\mathcal{L}$ on sellainen struktuuri $\mathcal{H}$, jossa

- domain on $\mathcal{L}$:n Herbrand-universumi, ja
- funktion f tulkinta $f^{\mathcal{H}}$ on funktio joka kuvaa universumin alkiot $t_1, \ldots, t_n$ termiksi (universumin alkioksi) $f(t_1, \ldots, t_n)$, ja
- vakion c tulkinta $c^{\mathcal{H}}$ on c itse.

Esimerkki. Kielessä on vakio c ja funktiosymboli $f(\ldots, \ldots)$.

Herbrand-universumi on
$c, f(c,c), f(f(c,c),c), f(c,f(c,c)), f(f(c,c),f(c,c)), \ldots$.

Esimerkki

$S = \{\{P(a)\}, \{\neg Q(x), P(x)\}, \{\neg Q(x), R(x,f(x))\}\}$,
predikaattikalkyylin lauseena
$\forall x(P(a) \wedge (\neg Q(x) \vee P(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee R(x,f(x))))$.

- S:n Herbrand-universumi on $H = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$.
- Eräs Herbrand-struktuuri on $\mathcal{H}$, jonka domain on H ja

$$\begin{aligned}
a^{\mathcal{H}} &= a \\
f^{\mathcal{H}} &= \text{funktio, joka kuvaa kunkin termin } t \text{ termille } f(t) \\
P^{\mathcal{H}} &= \{a, f(a), f(f(f(a)))\} \\
Q^{\mathcal{H}} &= \{f(a)\} \\
R^{\mathcal{H}} &= \{\langle a, f(a)\rangle, \langle f(a), f(f(a))\rangle\}.
\end{aligned}$$

- Herbrand-kanta B koostuu *atomisista lauseista*, jotka voidaan konstruoida käyttäen kielen $\mathcal{L}$ predikaattisymboleja ja Herbrand-universumin U muuttujattomia termejä: $B = \{P(a), Q(a), R(a,a), P(f(a)), Q(f(a)), R(a, f(a)), \ldots\}$.
- Herbrand-struktuuri voidaan antaa literaalijoukkona

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \{P(a), \neg Q(a), \neg R(a,a), P(f(a)), Q(f(a)), R(a, f(a)),\\ &\quad \neg R(f(a), a)), \neg R(f(a), f(a)), \ldots\},\end{aligned}$$

joka määrittelee, mitkä atomiset lauseet ovat tosia/epätosia $\mathcal{H}$:ssa tai vaihtoehtoisesti Herbrand-kannan B osajoukkona

$$\mathcal{H} = \{P(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(a, f(a)), \ldots\},$$

joka määrittelee, mitkä atomiset lauseet ovat tosia $\mathcal{H}$:ssa.

Herbrandin teoreema

Väite. (Kirjassa T10.4 ja T10.6) Olkoon S joukko klausuuleita.

- S on toteutumaton jos ja vain jos sen kaikkien klausuulien muuttujattomien instanssien joukko S' on toteutumaton.
- S on toteutumaton jos ja vain jos on olemassa äärellinen toteutumaton joukko S' joukon S klausuulien muuttujattomia instansseja.

Instantioidessa klausuulien muuttujia käytetään Herbrand-universumin U muuttujattomia termejä.

Huomaa, että muuttujattomien instanssien joukko S' voidaan tulkita lauselogiikan klausuulijoukoksi, jos Herbrand-kannan B atomiset lauseet tulkitaan atomisina lauseiksi, joilla on rakenteinen nimi.

Unifikaatio

Määritelmä. Äärelliset joukot $\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_n/t_n\}$, missä x_i ovat muuttujia (x_i on eri muuttuja kuin x_j, jos $i \neq j$) ja termi t_i ei ole x_i, ovat *substituutioita*.

Jos t_i:t ovat muuttujattomia, substituutio on *muuttujaton*.

Jos t_i:t ovat muuttujia, substituutio on *nimeämissubstituutio*.

Määritelmä. Olkoon E termi, literaali tms. ja $\theta = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ substituutio. $E\theta$ on kuten E, paitsi että kukin x_i:n esiintymä E:ssä on korvattu termillä t_i.

Jos $E\theta$:ssa ei esiinny muuttujia, $E\theta$ on E:n muuttujaton instanssi.

Esimerkki. Olkoon $E = P(x, y, z, v, w)$ ja $\theta = \{x/y, y/x, z/x, v/f(x), w/g(f(y), c)\}$. Nyt $E\theta$ on

$$P(y, x, x, f(x), g(f(y), c))$$

Määritelmä.
Olkoot $\theta = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ ja $\lambda = \{y_1/u_1, \ldots, y_m/u_m\}$. Substituutioiden θ ja λ *kompositio* $\theta\lambda$ (tai $\theta \circ \lambda$) on joukko

$$\{x_1/t_1\lambda, \ldots, x_n/t_n\lambda, y_1/u_1, \ldots, y_m/u_m\}$$

josta on poistettu alkiot $x_i/t_i\lambda$ joille $t_i\lambda = x_i$ ja alkiot y_i/u_i joille $y_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Ajatus: $E(\theta\lambda) = (E\theta)\lambda$

Esimerkki. Olkoon

$$\begin{aligned}\theta &= \{x_1/t_1, x_2/t_2\} = \{x/f(y), y/z\} \\ \lambda &= \{y_1/u_1, y_2/u_2, y_3/u_3\} = \{x/a, y/b, z/y\}.\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}&\{x_1/t_1\lambda, x_2/t_2\lambda, y_1/u_1, y_2/u_2, y_3/u_3\} = \\ &\{x/f(b), y/y, x/a, y/b, z/y\}\end{aligned}$$

Koska $t_2\lambda = x_2$ ja $y_1, y_2 \in \{x_1, x_2, x_3\}$, tulee ylläolevasta joukosta poistaa vastaavat elementit. Substituutio $\theta\lambda$ on siis

$$\{x_1/t_1\lambda, y_3/u_3\} = \{x/f(b), z/y\}.$$