Kaikki, jokin

Lauselogiikka useisiin tarkoituksiin liian yksinkertainen:

A = "a on viallinen", B = "b on viallinen", C = "c on viallinen"

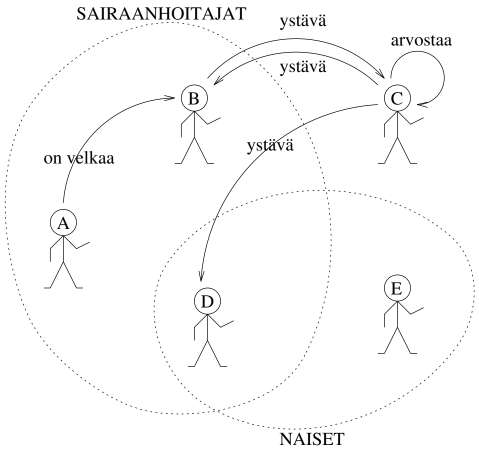
"kaikki ovat viallisia" = $A \wedge B \wedge C$

"jokin on viallinen" = $A \vee B \vee C$

C_d = "c on isompi kuin d", D_e = "d on isompi kuin e", ...

"jos x on isompi kuin y ja y on isompi kuin z,
niin x on isompi kuin z":

$(C_d \wedge D_e \to C_e) \wedge (C_e \wedge E_d \to C_d) \wedge (D_e \wedge E_c \to D_c) \wedge (D_e \wedge E_d \to D_d) \wedge \cdots$



Predikaattilogiikan syntaksi

Kieli $\mathcal{L}$ koostuu seuraavista symboleista:

$x, y, z, v, x_0, x_1, \ldots, y_0, \ldots$	muuttujat
$c_1, c_2, \ldots$	vakiot
$f, g, h, f_0, f_1, \ldots, g_0, \ldots$	funktiosymbolit
$P, Q, R, P_0, P_1, \ldots, Q_0, \ldots$	predikaattisymbolit
$=$	yhtäsuuruuspredikaatti
$\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$	lauselogiikan konnektiivit
$\exists$	eksistenssikvanttori: jollekin...
$\forall$	universaalikvanttori: kaikille...
$(,)$	sulut ja pilkku

Määritelmä.

1. Muuttujat ovat *termejä.*
2. Vakiot ovat *termejä.*
3. Jos f on n-paikkainen funktiosymboli ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat termejä, niin $f(t_1, \ldots, t_n)$ on *termi.*
4. Muita termejä ei ole.

Esim: x, c, $f(x)$, $f(f(f(f(f(x)))))$, $g(f(x), g(f(x), g(x, c)))$.

Määritelmä. Termi, jossa ei esiinny muuttujia, on *muuttujaton termi* (ground term).

Määritelmä. Olkoon P n-paikkainen predikaattisymboli ja olkoot $t_1, \ldots, t_n$ termejä. Tällöin seuraavat ovat *atomikaavoja.*

- $t_1 = t_2$
- $P(t_1, \ldots, t_n)$

Muita atomikaavoja ei ole.

Esimerkki. Atomikaavoja:

$$P(x_1) \qquad Q(c_1, x_1, y_1) \qquad x_1 = x_2$$
$$g(x_1, x_2) = f(f(c_1))$$
$$Q(x_1, c_1, f(x), h(f(x_1), c_1, x_1), x_2, x_2, x_3)$$

Määritelmä.

1. atomikaavat ovat *kaavoja*
2. jos ϕ ja ψ ovat kaavoja ja x on muuttuja, niin myös

   $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$, $((\forall x)\phi)$, $((\exists x)\phi)$

   ovat *kaavoja.*
3. muita kaavoja ei ole.

Predikaattilogiikan kaavoja: $P(c)$

$$((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)))$$
$$((\forall x)(P(x) \vee ((\exists y)Q(x, y))))$$
$$((\exists x)((\forall y)((\forall z)P(x, y, z))))$$

Olkoon t tuoli, h hattu, s sateenvarjo, $P(x, y)$: "x on y:n päällä".

$\neg P(s, t)$

"sateenvarjo ei ole tuolin päällä".

$\exists x \; P(x, h)$

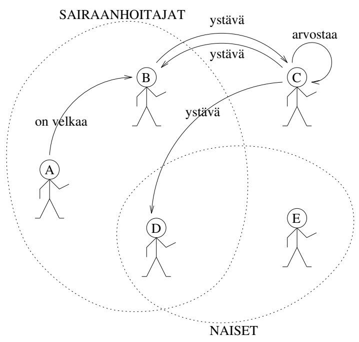
"on olemassa sellainen x, että x on hatun päällä", eli "hatun päällä on jotakin".

$\exists x \forall y \; \neg P(y, x)$

"on olemassa sellainen x, että kaikille y, y ei ole x:n päällä", eli "jonkin päällä ei ole mitään".

$\forall x (P(x, h) \rightarrow P(x, t))$

"kaikille x: jos x on hatun päällä, niin x on tuolin päällä", eli "kaikki hatun päällä olevat ovat tuolin päällä".



$N(e) \rightarrow A(c, c)$	$\exists x \exists y (Y(x, y) \wedge Y(y, x))$
$\exists x \exists y (S(x) \wedge S(y) \wedge V(x, y))$	$(\exists x (A(x, x))) \wedge (\exists x (S(x) \wedge N(x)))$
$\neg \forall x (S(x) \rightarrow N(x))$	$\forall x (Y(x, c) \rightarrow V(a, x))$

Vapaat ja sidotut muuttujat kaavassa

Määritelmä. Olkoot $\exists x\psi$ ja $\forall x\phi$ predikaattilogiikan kaavoja.
Alikaava ψ on muuttujan x vaikutusalue (scope) kaavassa $\exists x\psi$.
Alikaava ϕ on muuttujan x vaikutusalue kaavassa $\forall x\phi$.

Esimerkki.

$$\forall x\,\overbrace{(P(x)\to\exists y\;\underbrace{Q(x,y)}_{\text{y:n vaikutusalue}}\quad)}^{\text{x:n vaikutusalue}}$$

$$\exists x\,\overbrace{(Q(x)\to\forall y\;\underbrace{Q(y,z)}_{\text{y:n vaikutusalue}}\quad)}^{\text{x:n vaikutusalue}}$$

Määritelmä. Muuttujan x esiintymä kaavassa ψ on *sidottu*, jos se sijaitsee $\forall x$:n (tai $\exists x$:n) vaikutusalueessa. Kvanttorisymbolia seuraava muuttujaesiintymä on sidottu.

Jos muuttujan x esiintymä ei ole sidottu, niin x:n esiintymä on *vapaa*.

Muuttuja x *esiintyy vapaana* ϕ:ssä, jos sillä on vapaa esiintymä ϕ:ssä.

Kaava ϕ on *lause*, jos siinä ei ole vapaita muuttujaesiintymiä.

Esimerkki.

$$\forall\overbrace{x}^{S}(P(\overbrace{x}^{S},\overbrace{y}^{V},\overbrace{z}^{V})\vee\exists\overbrace{y}^{S}(Q(\overbrace{y}^{S})\to R(\overbrace{x}^{S},\overbrace{z}^{V})))$$

Sijoitus kaavaan

Määritelmä. Olkoon $\phi(x)$ kaava, jossa muuttuja x mahdollisesti esiintyy vapaana ja t muuttujaton termi. Kaavalla $\phi(t)$ tarkoitetaan kaavaa $\phi(x)$, jossa jokainen muuttujan x vapaa esiintymä on korvattu termillä t.

Esimerkki.

1. Olkoon $\phi(y)=\exists x(P(x,y)\vee Q(y,x))$.

Nyt $\phi(c)=\exists x(P(x,c)\vee Q(c,x))$ ja
$\phi(f(f(d)))=\exists x(P(x,f(f(d)))\vee Q(f(f(d)),x))$.

2. Olkoon $\psi(x)=\exists x(P(x))\wedge Q(x)$.

Nyt $\psi(c)=\exists x(P(x))\wedge Q(c)$.

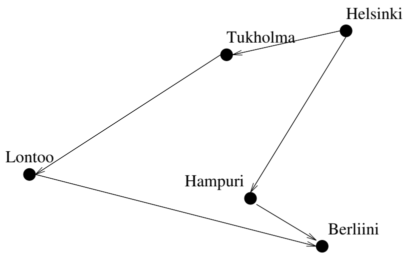
Predikaattilogiikan semantiikka

Määritelmä. *Struktuuri* (rakenne) $\mathcal{A}$ kielelle $\mathcal{L}$ koostuu

- universumista A, joka on jokin ei-tyhjä joukko,
- ja predikaatti-, vakio- ja funktiosymbolien tulkinnoista.
  - n-paikkaisen predikaattisymbolin P tulkintana on relaatio $P^{\mathcal{A}}\subseteq A\times\cdots\times A=A^n$.
  - Vakiosymbolin c tulkintana on universumin A alkio $c^{\mathcal{A}}$.
  - n-paikkaisen funktiosymbolin f tulkintana on funktio $f^{\mathcal{A}}$ joukolta A^n joukolle A.

Huomaa, että joukon A^n alkiot ovat monikkoja (tai jonoja) $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$, missä alkiot $a_1\in A,\ \ldots,\ a_n\in A$.

Esimerkki



$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
A & = & \{he, tu, ha, be, lo\} & \text{Helsinki}^{\mathcal{A}} & = & he \\
\text{Tukholma}^{\mathcal{A}} & = & tu & \text{Hampuri}^{\mathcal{A}} & = & ha \\
\text{Berliini}^{\mathcal{A}} & = & be & \text{Lontoo}^{\mathcal{A}} & = & lo \\
\text{lento}^{\mathcal{A}} & = & \multicolumn{4}{l}{\{\langle he, tu\rangle, \langle tu, lo\rangle, \langle lo, be\rangle, \langle he, ha\rangle, \langle ha, be\rangle\} \subseteq A^2}
\end{array}
$$

Muuttujattomien termien tulkinta

Määritelmä.

- Vakio c *nimeää* universumin alkion $c^{\mathcal{A}}$.
- Jos termit $t_1, \ldots, t_n$ nimeävät universumin alkion $t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}}$, niin $f(t_1, \ldots, t_n)$ *nimeää* universumin alkion $f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}})$.

Näin voimme viitata kielen $\mathcal{L}$ muuttujattomilla termeillä universumin A alkioihin (kunhan symbolien tulkinnat on annettu).

Kuulukoon kieleen $\mathcal{L}$ symbolit P, c, d, f, g. Olkoon struktuurin $\mathcal{A}$ universumi luonnolliset luvut $0, 1, 2, \ldots$ ja

$$
\begin{array}{rcl}
P^{\mathcal{A}} & = & \emptyset \text{ (tyhjä relaatio)} \\
c^{\mathcal{A}} & = & 1 \\
d^{\mathcal{A}} & = & 7 \\
f^{\mathcal{A}} & = & \text{seuraajafunktio, eli } f^{\mathcal{A}}(n) = n + 1 \\
g^{\mathcal{A}} & = & \text{summafunktio, eli } g^{\mathcal{A}}(n, m) = n + m \\
c & & \text{nimeää alkion } 1 \\
d & & \text{nimeää alkion } 7 \\
f(c) & & \text{nimeää alkion } 2 \\
f(f(c)) & & \text{nimeää alkion } 3 \\
g(f(c), d) & & \text{nimeää alkion } 9
\end{array}
$$

1. Konstruoidaan struktuuri $\mathcal{A}_1$ kielelle, jossa on 2-paikkainen predikaattisymboli O ja vakiosymbolit c, d, e. Olkoon $A = \{1, 2\}$.

$$
\begin{array}{ll}
O^{\mathcal{A}_1} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\} & d^{\mathcal{A}_1} = 2 \\
c^{\mathcal{A}_1} = 1 & e^{\mathcal{A}_1} = 1
\end{array}
$$

2. Konstruoidaan struktuuri $\mathcal{A}_2$ kielelle, jossa on 1- ja 2-paikkaiset predikaattisymbolit P_1, P_2, vakio c ja 1-paikkainen funktiosymboli f. Olkoon A luonnollisten lukujen joukko.

$$
\begin{array}{rcl}
P_1^{\mathcal{A}_2} & = & \{n | n \text{ on parillinen luonnollinen luku }\} \\
P_2^{\mathcal{A}_2} & = & \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \ldots\} \\
c^{\mathcal{A}_2} & = & 1024 \\
f^{\mathcal{A}_2} & = & \text{funktio } f^{\mathcal{A}_2}(n) = 3 \cdot n + 7
\end{array}
$$

Predikaattilogiikan totuusmääritelmä

Olkoon $\mathcal{A}$ struktuuri kielelle $\mathcal{L}$ siten, että jokainen A:n alkio on jonkin $\mathcal{L}$:n muuttujattoman termin nimeämä. Määritellään milloin lause ϕ on tosi struktuurissa $\mathcal{A}$ (merkitään $\mathcal{A} \models \phi$).

1. $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$ joss $t_1^{\mathcal{A}}$ ja $t_2^{\mathcal{A}}$ ovat sama universumim A alkio (t_1 ja t_2 ovat muuttujattomia termejä)
2. $\mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)$ joss $\langle t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}} \rangle \in P^{\mathcal{A}}$ ($t_1, \ldots, t_n$ ovat muuttujattomia termejä)
3. $\mathcal{A} \models \neg\psi$ joss $\mathcal{A} \not\models \psi$ (ei $\mathcal{A} \models \psi$)
4. $\mathcal{A} \models \psi \wedge \phi$ joss $\mathcal{A} \models \psi$ ja $\mathcal{A} \models \phi$
5. $\mathcal{A} \models \psi \vee \phi$ joss $\mathcal{A} \models \psi$ tai $\mathcal{A} \models \phi$

6. $\mathcal{A} \models \psi \rightarrow \phi$ joss $\mathcal{A} \not\models \psi$ tai $\mathcal{A} \models \phi$
7. $\mathcal{A} \models \psi \leftrightarrow \phi$ joss joko $\mathcal{A} \models \psi$ ja $\mathcal{A} \models \phi$ tai $\mathcal{A} \not\models \psi$ ja $\mathcal{A} \not\models \phi$
8. $\mathcal{A} \models \exists x \psi(x)$ joss $\mathcal{A} \models \psi(t)$ *jollekin* muuttujattomalle termille t
9. $\mathcal{A} \models \forall x \psi(x)$ joss $\mathcal{A} \models \psi(t)$ *kaikille* muuttujattomille termeille t

- Kohdissa 8 ja 9 oletetaan, että jokaisella A:n alkiolla a on nimi $\mathcal{A}$:ssa (muuttujaton termi t siten, että $t^{\mathcal{A}} = a$).
- Tarvittaessa kieli $\mathcal{L}$ ja struktuuri $\mathcal{A}$ voidaan täydentää (esim. lisäämällä vakioita) siten, että tämä vaatimus toteutuu.

Esimerkki. Olkoon kielessä $\mathcal{L}$ symbolit P, c, d. Olkoon $\mathcal{A}$:n universumi $A = \{1, 2\}$, $P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$, $c^{\mathcal{A}} = 1$ ja $d^{\mathcal{A}} = 2$.

1. Lauseen $P(c, d)$ totuus $\mathcal{A}$:ssa:

   $c^{\mathcal{A}} = 1$, $d^{\mathcal{A}} = 2$ ja $\langle 1, 2\rangle \in P^{\mathcal{A}}$, joten $\mathcal{A} \models P(c, d)$.

2. Lauseen $P(c, d) \vee P(d, c)$ totuus $\mathcal{A}$:ssa.

   $\langle 2, 1\rangle \notin P^{\mathcal{A}}$, joten $\mathcal{A} \not\models P(d, c)$.
   Disjunktion totuusmääritelmän perusteella
   $\mathcal{A} \models P(c, d) \vee P(d, c)$.

Onko lause $\forall x \exists y P(x, y)$ tosi struktuurissa $\mathcal{A}$?

1. Tutkitaan, onko $\mathcal{A} \models \exists y\ P(c, y)$.

   Koska $\mathcal{A} \models P(c, d)$ (todettiin edellä),
   $\mathcal{A} \models \exists y\ P(c, y)$.

2. Tutkitaan, onko $\mathcal{A} \models \exists y\ P(d, y)$.

   Koska $\mathcal{A} \models P(d, d)$ (eli $\langle 2, 2\rangle \in P^{\mathcal{A}}$),
   $\mathcal{A} \models \exists y\ P(d, y)$.

Koska kaikille muuttujattomille termeille t (tässä tapauksessa vakioille c ja d) pätee $\mathcal{A} \models \exists y\ P(t, y)$, niin $\mathcal{A} \models \forall x \exists y\ P(x, y)$.