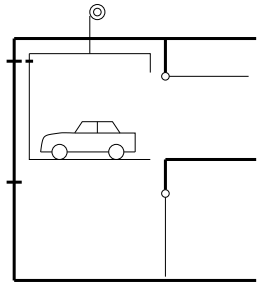
# Konkreettisempi esimerkki

Mallinnetaan yksinkertaistettua hissijärjestelmää lauselogiikalla:



Atomiset lauseet:

$A_i$: kerroksen $i$ ovi on auki
$K_i$: hissi on kerroksessa $i$

missä $i = 1$ tai $i = 2$

Kuvataan lauselogiikalla järjestelmän sallitut tilat (eli haetaan lausejoukko $\Sigma$, jonka *mallit* vastaavat sallittuja tiloja).



- Tyhjällä lausejoukolla $\emptyset$ on ei-toivottu malli $\mathcal{V}$:
  $\mathcal{V}(K_1) = T$, $\mathcal{V}(K_2) = T$, $\mathcal{V}(A_1) = T$ ja $\mathcal{V}(A_2) = T$.
  Tämä vastaa järjestelmän tilaa, jossa hissi on yhtäaikaa molemmissa kerroksissa ja molemmat ovet olisivat auki (mahdoton) $\Rightarrow$ Tarvitaan lisää lauseita (rajoitteita).
- Fyysisen maailman asettama rajoitus: $\neg K_1 \vee \neg K_2$
  (huomaa, että $\mathcal{V}$ ei ole tämän lauseen malli)
- Emme kuitenkaan halua asettaa vaatimusta $K_1 \vee K_2$
  (hissi voi olla matkalla kerrosten välillä).
- Oville asetettavat turvallisuusvaatimukset: $A_1 \rightarrow K_1$, $A_2 \rightarrow K_2$.

$\Rightarrow$ Järjestelmälle saadaan spesifikaatio

$$\Sigma = \{\neg K_1 \vee \neg K_2, A_1 \rightarrow K_1, A_2 \rightarrow K_2\}.$$



- Spesifikaatiolla on olennaisesti seuraavat mallit:

| | $K_1$ | $A_1$ | $K_2$ | $A_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{V}_1$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $\mathcal{V}_2$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $\mathcal{V}_3$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ |
| $\mathcal{V}_4$ | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ |
| $\mathcal{V}_5$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |

- Voimme myös osoittaa, että hissin molemmat ovet eivät voi olla yhtäaikaisesti auki (turvallisuusominaisuus):

$$\Sigma \models \neg(A_1 \wedge A_2).$$

  Kokeile tämän todistamista semanttisella taululla.



# Lauseiden klausuulimuoto

- Atomiset lauseet $A$ ja niiden negaatiot $\neg A$ ovat *literaaleja*.
- Literaalin komplementti: $\overline{A} = \neg A$, $\overline{\neg A} = A$.
- Literaalien $l_1, \ldots, l_n$ disjunktio $l_1 \vee \cdots \vee l_n$ on *klausuuli*.
  Klausuulit kirjoitetaan usein muodossa $\{l_1, \ldots, l_n\}$.
- *Tyhjä klausuuli* $\Box$ on aina epätosi.
- Joukko klausuuleita $S$ on tosi, jos kaikki sen alkiot ovat tosia.
  Tyhjä klausuulijoukko $\emptyset$ on aina tosi.

Klausuulijoukko $\{\{A, \neg B\}, \{\neg C, \neg A, D\}\}$ vastaa lausetta $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee D)$.

- *Totuusjakelu* $\mathcal{A}$ on joukko literaaleja siten, ettei millekään atomiselle lauseelle $B$ sekä $B \in \mathcal{A}$ että $\neg B \in \mathcal{A}$ (*konsistenssi*).
- Totuusjakelu $\mathcal{A}$ on *täydellinen*, jos jokaiselle atomiselle lauseelle $B$ joko $B \in \mathcal{A}$ tai $\neg B \in \mathcal{A}$.

  Täydellinen totuusjakelu vastaa valuaatiota $\mathcal{V}$, jolle $\mathcal{V}(B) = T$, kun $B \in \mathcal{A}$, ja $\mathcal{V}(B) = F$, kun $\neg B \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ *toteuttaa* klausuulijoukon $S$ (merkitään $\mathcal{A} \models S$), joss kaikille klausuuleille $C \in S$ pätee $C \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

  Vastaavasti: valuaatio $\mathcal{V}$ toteuttaa lauseen $\alpha$ joss $\mathcal{V}(\alpha) = T$.
- Klausuulijoukko $S$ on *toteutuva* jos on totuusjakelu $\mathcal{A}$ siten että $\mathcal{A} \models S$. Muuten $S$ on *toteutumaton*.



## Esimerkkejä

Olkoon $\mathcal{A} = \{A, \neg B\}$.

Nyt

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\models \{\{A, C, E\}, \{\neg A, \neg B\}\} \\ \mathcal{A} &\models \emptyset \\ \mathcal{A} &\not\models \{\{A, B\}, \{C\}\} \end{aligned}$$

Klausuulijoukot $\{\{A, C, E\}, \{\neg A, \neg B\}\}$ ja $\emptyset$ ovat toteutuvia.

Mutta $\{\{A\}, \{\neg A\}\}$ ja $\{\Box\}$ eivät ole toteutuvia.

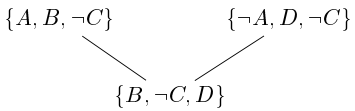


## Resoluutiosääntö

Olkoot $C_1 = \{l, l_1, \ldots, l_n\}$ ja $C_2 = \{\bar{l}, l'_1, \ldots, l'_m\}$ klausuuleja.

Klausuuli $C = \{l_1, \ldots, l_n, l'_1, \ldots, l'_m\}$ on $C_1$:n ja $C_2$:n *resolventti*.

### Esimerkki




Sääntöä on sovellettu literaaleihin $A$ ja $\neg A$. Klausuulit ovat joukkoja, joten $\neg C$ esiintyy resolventissa $\{B, \neg C, D\}$ vain kerran.



## Resoluutiotodistukset

Klausuulin $C$ *johto* klausuulijoukosta $S$ on äärellinen jono klausuuleja $C_1, \ldots, C_n$, missä $C_n = C$ ja jokaiselle $C_i$ joko $C_i \in S$ tai $C_i$ on joidenkin aikaisempien klausuulien resolventti.

Jos klausuulijoukosta $S$ voidaan johtaa tyhjä klausuuli $\Box$, kyseistä johtoa kutsutaan $S$:n *refutaatioksi* (hylkäykseksi).

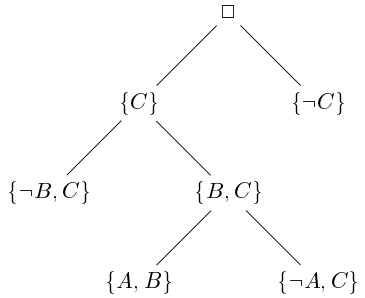
## Esimerkkejä

$S = \{\{A, B\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, C\}, \{\neg C\}\}$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\{A, B\}$ | S |
| 2. | $\{\neg A, C\}$ | S |
| 3. | $\{\neg B, C\}$ | S |
| 4. | $\{\neg C\}$ | S |
| 5. | $\{B, C\}$ | 1, 2 |
| 6. | $\{C\}$ | 3, 5 |
| 7. | $\square$ | 4, 6 |



### Resoluutiotodistuksen puuesitys






$S = \{\{A, B\}, \{\neg A, B\}, \{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg B\}\}$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\{A, B\}$ | S |
| 2. | $\{\neg A, B\}$ | S |
| 3. | $\{A, \neg B\}$ | S |
| 4. | $\{\neg A, \neg B\}$ | S |
| 5. | $\{B\}$ | 1, 2 |
| 6. | $\{\neg B\}$ | 3, 4 |
| 7. | $\square$ | 5, 6 |



## Pätevyyden tutkiminen resoluutiolla

**Väite.** Lause $\alpha$ on pätevä joss $\neg\alpha$ on toteutumaton.

($\mathcal{V}(\neg\alpha) = F$ eli $\mathcal{V}(\alpha) = T$ kaikille valuaatioille $\mathcal{V}$).

Menettely: $\neg\alpha$
- $\Rightarrow$ konjunktiiviseen normaalimuotoon
- $\Rightarrow$ klausuulijoukoksi $S$
- $\Rightarrow$ suoritetaan $S$:n refutaatio
- $\Rightarrow$ $S$ toteutumaton
- $\Rightarrow$ $\neg\alpha$ toteutumaton
- $\Rightarrow$ $\alpha$ pätevä

Onko $(A \to B) \wedge (\neg A \to C) \to (B \vee C)$ pätevä?

Negaation CNF on $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge \neg B \wedge \neg C$.

Klausuulijoukkona $\{\{\neg A, B\}, \{A, C\}, \{\neg B\}, \{\neg C\}\}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\{\neg A, B\}$ | S | |
| 2. | $\{A, C\}$ | S | |
| 3. | $\{\neg B\}$ | S | |
| 4. | $\{\neg C\}$ | S | Lause on siis pätevä. |
| 5. | $\{B, C\}$ | 1, 2 | |
| 6. | $\{C\}$ | 3, 5 | |
| 7. | $\square$ | 4, 6 | |



## Loogisen seuraavuuden tutkiminen resoluutiolla

**Väite.** Lause $\alpha$ on lausejoukon $\Sigma$ looginen seuraus, joss lausejoukko $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ on toteutumaton.

Menettely:

| | | |
|---|---|---|
| $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ | $\Rightarrow$ | konjunktiiviseen normaalimuotoon |
| | $\Rightarrow$ | klausuulijoukoksi $S$ |
| | $\Rightarrow$ | suoritetaan $S$:n refutaatio |
| | $\Rightarrow$ | $S$ toteutumaton |
| | $\Rightarrow$ | $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ toteutumaton |
| | $\Rightarrow$ | $\alpha$ on $\Sigma$:n looginen seuraus |



Onko $A$ lausejoukon $\{\neg A \to B, B \vee C \to \neg B\}$ looginen seuraus?

| lause | CNF | klausuuleina |
|---|---|---|
| $\neg A$ | $\neg A$ | $\{\neg A\}$ |
| $\neg A \to B$ | $A \vee B$ | $\{A, B\}$ |
| $B \vee C \to \neg B$ | $(\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg B)$ | $\{\neg B, \neg C\}, \{\neg B\}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | $\{\neg A\}$ | S | Saadaan klausuulijoukko $S =$ |
| 2. | $\{A, B\}$ | S | $\{\{\neg A\}, \{A, B\}, \{\neg B, \neg C\}, \{\neg B\}\}$ |
| 3. | $\{\neg B, \neg C\}$ | S | |
| 4. | $\{\neg B\}$ | S | Vastaus: lause $A$ on |
| 5. | $\{B\}$ | 1, 2 | lausejoukon looginen seuraus. |
| 6. | $\square$ | 4, 5 | |



## Resoluution virheettömyys ja täydellisyys

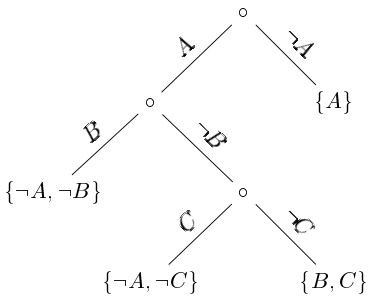
**Väite.** Jos $S$:llä on refutaatio, on $S$ toteutumaton.

*Todistus:* Suoraan sillä perusteella, että jos on totuusjakelu $\mathcal{A}$ s.e. $\mathcal{A} \models C_1$ ja $\mathcal{A} \models C_2$, niin myös $\mathcal{A} \models C$ niiden resolventille $C$.

**Väite.** Jos $S$ on toteutumaton, on $S$:llä refutaatio.

Todistuksen idea on annettu seuraavassa esimerkissä. Refutaatio voidaan hakea suorittamalla tapausanalyysi klausuulijoukossa esiintyvien atomisten lauseiden suhteen.

$S = \{\{A\}, \{B, C\}, \{\neg A, \neg B\}, \{\neg A, \neg C\}\}$

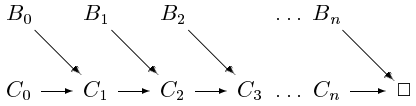



Lehtisolmuihin merkityt klausuulit ovat epätosia ko. totuusjakelussa.



## Lineaarinen resoluutio

Lineaarisessa resoluutiossa rajoitetaan johdot klausuulijoukosta $S$ seuraavanlaisiksi lineaarisiksi sekvensseiksi:

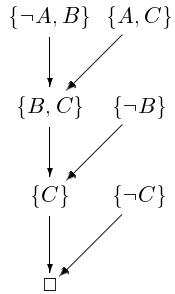



- $C_0 \in S$ ja jokainen $B_i \in S$ tai $B_i = C_j$ jollekin $0 \leq j < i$.
- Jokainen $C_{i+1}$ on klausuuleiden $C_i$ ja $B_i$ resolventti.

Lineaarisuusvaatimus ei vaikuta resoluution virheettömyys- ja täydellisyysominaisuuksiin.



Klausuulijoukko: $\{\{\neg A, B\}, \{A, C\}, \{\neg B\}, \{\neg C\}\}$






## Hissiesimerkki resoluutiolla

| lause | CNF | klausuuleina | |
|---|---|---|---|
| $\neg K_1 \vee \neg K_2$ | $\neg K_1 \vee \neg K_2$ | 1. $\{\neg K_1, \neg K_2\}$ | |
| $A_1 \rightarrow K_1$ | $\neg A_1 \vee K_1$ | 2. $\{\neg A_1, K_1\}$ | |
| $A_2 \rightarrow K_2$ | $\neg A_2 \vee K_2$ | 3. $\{\neg A_2, K_2\}$ | |
| $\neg\neg(A_1 \wedge A_2)$ | $A_1 \wedge A_2$ | 4. $\{A_1\}$, 5. $\{A_2\}$ | |
| | Resoluutio: | 6. $\{K_1\}$ | 2,4 |
| | | 7. $\{K_2\}$ | 3,5 |
| | | 8. $\{\neg K_2\}$ | 1,6 |
| | | 9. $\square$ | 7,8 |