Vastamallien konstruoinnista

Toisessa kotitehtävässä pyydetään antamaan struktuuri, jossa predikaattilogiikan lause on epätosi (halutaan siis *vastaesimerkkiä/vastamallia* lauseen pätevyydelle).

Jos lauseessa esiintyvät predikaatit ovat yksipaikkaisia, lauseelle voidaan antaa luonnollinen joukko-opillinen tulkinta.

Esimerkki. Tarkastellaan lausetta $\phi = \forall x\ (P(x) \to Q(x))$.

Olkoon $\mathcal{A}$ struktuuri ja c vakio, joka nimeää alkion $c^{\mathcal{A}}$. Nyt $\mathcal{A} \models P(c)$ täsmälleen silloin, kun $c^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$. Vastaavasti $\mathcal{A} \models Q(c)$, jos ja vain jos $c^{\mathcal{A}} \in Q^{\mathcal{A}}$. Siis $\mathcal{A} \models \phi$, jos ja vain jos $P^{\mathcal{A}} \subseteq Q^{\mathcal{A}}$.

Lause ϕ ei ole pätevä. Vastamalli saadaan esim. asettamalla struktuurin universumiksi $A = \{1\}$ ja valitsemalla tulkinnat $P^{\mathcal{A}} = \{1\}$ ja $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$ siten, ettei $P^{\mathcal{A}} \subseteq Q^{\mathcal{A}}$ toteudu.

Vastamallin konstruoinnissa voidaan hyödyntää myös semanttisen taulun ristiriidattomasta haarasta saatavia vaatimuksia.

$$
\begin{array}{c}
F(\forall x\ (P(x) \to Q(x))) \\
| \\
F(P(c) \to Q(c)) \\
| \\
T(P(c)) \\
| \\
F(Q(c))
\end{array}
$$

Taulun ristiriidattoman haaran perusteella riittää, että struktuurin universumissa A on yksi alkio $c^{\mathcal{A}} = 1$ siten, että $1 \in P^{\mathcal{A}}$ ja $1 \notin Q^{\mathcal{A}}$. Tämä toteutuu mm. valinnoilla $P^{\mathcal{A}} = \{1\}$ ja $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$.

Menettely on käyttökelpoinen erityisesti, jos *valmiin taulun* ristiriidaton haara on *äärellinen* (kuten yllä).

Lisää joukko-opillisia tulkintoja (A on universumi):

$\forall x\ (P(x))$	saa tulkinnan	$P^{\mathcal{A}} = A$
$\forall x\ (P(x) \to \neg Q(x))$	"	$P^{\mathcal{A}} \subseteq \overline{Q^{\mathcal{A}}} = A - Q^{\mathcal{A}}$
$\exists x\ (P(x) \land Q(x))$	"	$P^{\mathcal{A}} \cap Q^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$
$\forall x\ (P(x) \lor Q(x) \to R(x))$	"	$P^{\mathcal{A}} \cup Q^{\mathcal{A}} \subseteq R^{\mathcal{A}}$

Vastamallit kannattaa muodostaa mahdollisimman yksinkertaisiksi:

Tulkinta	Vastamalli (ei toteuta tulkintaa)
$P^{\mathcal{A}} = A$	$A = \{1\}$, $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$
$P^{\mathcal{A}} \subseteq \overline{Q^{\mathcal{A}}} = A - Q^{\mathcal{A}}$	$A = \{1\}$, $P^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}} = \{1\}$
$P^{\mathcal{A}} \cap Q^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$	$A = \{1\}$, $P^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$
$P^{\mathcal{A}} \cup Q^{\mathcal{A}} \subseteq R^{\mathcal{A}}$	$A = \{1\}$, $P^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{A}} = \emptyset$, $Q^{\mathcal{A}} = \{1\}$

Unifikaatioalgoritmi

Erojoukko $D(S)$ ei-tyhjälle joukolle atomikaavoja S on

1. ensimmäiset eroavat termit, tai
2. jos predikaattisymbolit eivät samoja, atomikaavat itse.

Esimerkki. Joukon $S = \{P(x), Q(y)\}$ erojoukko $D(S) = S$.

Joukon $S = \{P(x, y), P(x, g(z))\}$ erojoukko $D(S) = \{y, g(z)\}$.

Unifikaatioalgoritmi:

1. $k := 0$, $S_k := S$ ja $\sigma_k := \epsilon$
2. Jos S_k on yksialkioinen joukko, lopeta algoritmin suoritus: S on unifioituva.
   Muussa tapauksessa etsi S_k:n erojoukko $D(S_k)$.
3. Jos $D(S_k)$:ssa on alkiot v_k ja t_k siten että v_k on muuttuja, joka ei esiinny t_k:ssa, mene kohtaan 4. Muussa tapauksessa lopeta algoritmin suoritus: S ei ole unifioituva.
4. $\sigma_{k+1} := \{v_k/t_k\}$ ja $S_{k+1} := S_k\{v_k/t_k\}$.
5. $k := k + 1$ ja mene kohtaan 2.

Väite. Olkoon S äärellinen ei-tyhjä joukko atomikaavoja:

- jos S on unifioituva, niin unifikaatioalgoritmin laskenta päättyy askeleen 2 kohdalla ja $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \ldots \sigma_k$ on S:n yleisin unifioija
- jos S ei ole unifioituva, niin unifikaatioalgoritimin laskenta päättyy askeleen 3 lopuksi.

Esimerkki. Lasketaan unifikaatioalgoritmilla joukon $S = \{P(x, f(x)), P(g(a), z)\}$ yleisin unifioija.

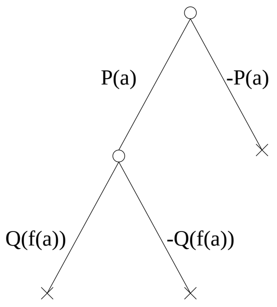
1. $S_0 = \{P(x, f(x)), P(g(a), z)\}, \sigma_0 = \epsilon$
2. $D(S_0) = \{x, g(a)\}$
3. alkio $v_0 = x$ ja $t_0 = g(a)$
4. $\sigma_1 = \{x/g(a)\}, S_1 = \{P(g(a), f(g(a))), P(g(a), z)\}$
2. $D(S_1) = \{f(g(a)), z\}$
3. alkio $v_1 = z$ ja $t_1 = f(g(a))$
4. $\sigma_2 = \{z/f(g(a))\}$, $S_2 =$
   $\{P(g(a), f(g(a))), P(g(a), f(g(a))) = \{P(g(a), f(g(a)))\}$
2. S_2 on yksialkioinen, joten S on unifioituva.

Yleisin unifioija on $\sigma = \sigma_0\sigma_1\sigma_2 = (\epsilon\{x/g(a)\})\{z/f(g(a))\} = \{x/g(a), z/f(g(a))\}$ ja $S\sigma = \{P(g(a), f(g(a)))\}$.

Huono ratkaisuproseduuri

1. Muutetaan ϕ:n negaatio klausuulijoukoksi S. Esim. $(\exists y \forall x\ (P(x, y) \land P(f(x), x))) \to (\forall x \exists y\ P(x, y))$ joukoksi $S = \{\{\neg P(c_1, x)\}, \{P(x, c_2)\}, \{P(f(x), x)\}\}$.
2. Tuotetaan joukkoja
   $H_0 = \{c_1, c_2\}$, $H_1 = \{c_1, c_2, f(c_1), f(c_2)\}$ ...
   $H_\infty = \{c_1, c_2, f(c_1), f(c_2), f(f(c_1)), f(f(c_2)), \ldots\}$
3. Tuotetaan joukkoja S_i', missä S_i on saatu S:stä korvaammalla S:n muuttujat termeillä joukosta H_i. Hebrandin teoreeman perusteella jollain askeleella j joukko S_j' on toteutumaton joss S on toteutumaton.

Esimerkki. $S = \{P(x), \neg P(x) \vee Q(f(x)), \neg Q(f(a))\}$.



Puu olisi pienempi jos $\times$-solmujen isä olisi $\times$-solmu. Näin olisi, jos joukkoon S kuuluisi klausuuleista $\neg Q(f(a))$ ja $\neg P(x) \vee Q(f(x))$ saatava klausuuli $\neg P(a)$.

Predikaattilogiikan resoluutiosääntö

Olkoot C_1 ja C_2 klausuuleja, joissa *ei ole yhteisiä* muuttujia, ja jotka ovat muotoa $C_1' \sqcup \{P\vec{t_1}, P\vec{t_2}, \ldots, P\vec{t_n}\}$ ja $C_2' \sqcup \{\neg P\vec{s_1}, \neg P\vec{s_2}, \ldots, \neg P\vec{s_m}\}$.

Jos σ on joukon $\{P\vec{t_1}, P\vec{t_2}, \ldots, P\vec{t_n}, P\vec{s_1}, P\vec{s_2}, \ldots, P\vec{s_m}\}$ yleisin unifioija (MGU), niin $C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$ on C_1:n ja C_2:n resolventti.

Huom. merkintä $A \sqcup B$ tarkoittaa keskenään alkiovieraiden ($A \cap B = \emptyset$) joukkojen A ja B unionia $A \cup B$.

Esimerkki

Olkoot

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{Q(x), \neg R(y), P(x,y), P(f(z), f(z))\} \\
C_2 &= \{\neg N(u), \neg R(w), \neg P(f(a), f(a)), \neg P(f(w), f(w))\}
\end{aligned}
$$

Joukon $\{P(x,y), P(f(z), f(z)), P(f(a), f(a)), P(f(w), f(w))\}$ yleisin unifioija on $\sigma = \{x/f(a), y/f(a), z/a, w/a\}$.

Klausuulien resolventti on $\{Q(f(a)), \neg R(f(a)), \neg N(u), \neg R(a)\}$.

Resoluution virheettömyys ja täydellisyys

Väite. Klausuulijoukko S on toteutumaton jos ja vain jos S:stä päästään resoluutiosäännöllä tyhjään klausuuliin $\square$.

Tämän perusteella resoluutiota voidaan käyttää pätevyyden $\models \phi$ ja loogisen seuraavuuden $\Sigma \models \phi$ osoittamiseen/tutkimiseen:

Väite. $\models \phi$ jos ja vain jos lauseen $\neg\phi$ klausuulimuodosta saadaan resoluutiolla tyhjä klausuuli $\square$.

Väite. $\Sigma \models \phi$ jos ja vain jos lausejoukon $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ klausuulimuodosta saadaan resoluutiolla tyhjä klausuuli $\square$.

Huomaa, että yllämainitun lausejoukon $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ lauseet voidaan saattaa klausuulimuotoon erikseen!!! Resoluutiossa käytetään lauseista saatavien klausuulijoukkojen unionia.

Osoita $P(a) \land \neg Q(a) \land \forall x(P(x) \to Q(x))$ toteutumattomaksi.

1. $\{P(a)\}$	P
2. $\{\neg Q(a)\}$	P
3. $\{\neg P(x), Q(x)\}$	P
4. $\{Q(a)\}$	1, 3, MGU $\{x/a\}$
5. $\Box$	2, 4, MGU ϵ

Osoita $\models \forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x P(x) \to \exists x P(x)) &\Rightarrow \neg(\neg\forall x P(x) \lor \exists x P(x)) \\
&\Rightarrow \forall x P(x) \land \neg\exists x P(x) \\
&\Rightarrow \forall x P(x) \land \forall x \neg P(x) \\
&\Rightarrow \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1) \land \neg P(x_2)) \\
\text{Saadaan klausuulijoukko} \quad S = &\quad \{\{P(x_1)\}, \{\neg P(x_2)\}\}.
\end{aligned}$$

Klausuuleista $\{P(x_1)\}$ ja $\{\neg P(x_2)\}$ saadaan $\Box$ (MGU $\{x_1/x_2\}$).

Osoita $\{\forall x(I(x) \to E(x)), \exists x(I(x) \land K(x))\} \models \exists x(E(x) \land K(x))$.

Saatetaan lauseet klausuulimuotoon:

$$\begin{aligned}
\forall x(I(x) \to E(x)) &\Rightarrow \forall x(\neg I(x) \lor E(x)) \\
&\Rightarrow \{\neg I(x), E(x)\}. \\
\exists x(I(x) \land K(x)) &\Rightarrow I(c) \land K(c) \\
&\Rightarrow \{I(c)\}, \{K(c)\} \\
\neg\exists x(E(x) \land K(x)) &\Rightarrow \forall x \neg(E(x) \land K(x)) \\
&\Rightarrow \forall x(\neg E(x) \lor \neg K(x)) \\
&\Rightarrow \{\neg E(x), \neg K(x)\}
\end{aligned}$$

Kokonaisuutena saadaan siis klausuulijoukko
$S = \{\{\neg I(x), E(x)\}, \{I(c)\}, \{K(c)\}, \{\neg E(x), \neg K(x)\}\}$.

1. $\{\neg I(x), E(x)\}$	P
2. $\{I(c)\}$	P
3. $\{K(c)\}$	P
4. $\{\neg E(y), \neg K(y)\}$	P $\{x/y\}$
5. $\{\neg I(y), \neg K(y)\}$	1, 4, MGU $\{x/y\}$
6. $\{\neg K(c)\}$	2, 5, MGU $\{y/c\}$
7. $\Box$	3, 6, MGU ϵ

Huom. Klausuulin 4 muuttuja x on uudelleennimetty muuttujaksi y, koska resoluutiosääntö edellyttää tätä.

Unifioijien kompositio on $\{x/c, y/c\}$.

Kerrossaturaatiostrategia

$$\begin{aligned}
S_0 &= S \\
S_i &= \{C \mid C \text{ saadaan resoluutiolla klausuuleista} \\
&\qquad C_1 \in S_0 \cup \cdots \cup S_{i-1} \text{ ja } C_2 \in S_{i-1}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_0 &= \{\{\neg I(x), E(x)\}, \{I(c)\}, \{K(c)\}, \{\neg E(y), \neg K(y)\}\} \\
S_1 &= \{\{E(c)\}, \{\neg E(c)\}, \{\neg I(x), \neg K(x)\}\} \\
S_2 &= \{\Box, \{\neg I(c)\}, \{\neg K(c)\}\} \\
S_3 &= \{\Box\} \\
S_4 &= \{\}
\end{aligned}$$

Tukijoukkostrategia

Määritelmä. S:n osajoukko T on *tukijoukko* (set-of-support), jos $S - T$ on toteutuva.

Tukijoukkostrategiassa ei milloinkaan suoriteta resoluutiota joukon $S - T$ klausuuleille keskenään.

Ajatus: olettamusten joukko on toteutuva. T on johdettavaa lausetta vastaavien klausuulien joukko, $S - T$ olettamuksia vastaavat klausuulit.

Väite. Tukijoukkoresoluutio on täydellinen strategia.

Alla klausuuli 4 muodostaa tukijoukon.

1. $\{\neg I(x), E(x)\}$ P
2. $\{I(c)\}$ P
3. $\{K(c)\}$ P
4. $\{\neg E(y), \neg K(y)\}$ P $\{x/y\}$
5. $\{\neg E(c)\}$ 3, 4, MGU $\{y/c\}$
6. $\{\neg I(c)\}$ 1, 5, MGU $\{x/c\}$
7. $\Box$ 2, 6, MGU ϵ

Lineaarinen resoluutio

Olkoon S klausuulijoukko. Alla oleva on johto lineaarisella resoluutiolla, jos C_0 on S:n klausuuli (mahdollisesti uudelleennimettynä) ja kukin B_i on joko S:n tai joukon $\{C_0, \ldots, C_{i-1}\}$ klausuuli (mahdollisesti uudelleennimettynä).

$$\begin{tikzcd}
B_0 \arrow[dr] & B_1 \arrow[dr] & B_2 \arrow[dr] & & \ldots\ B_n \arrow[dr] & \\
C_0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & C_3\ \ldots & C_n \arrow[r] & \Box
\end{tikzcd}$$