Pätevyys ja toteutuvuus

Määritelmä. Kielen $\mathcal{L}$ lause ψ on *pätevä* (merkitään $\models \psi$), joss ψ on tosi jokaisessa $\mathcal{L}$:n struktuurissa.

Esimerkki. $\models (\forall x\ P(x)) \vee \neg(\forall x\ P(x))$
$\models (\forall x\ P(x)) \leftrightarrow (\neg \exists x\ \neg P(x))$

Määritelmä. Kielen $\mathcal{L}$ lause ψ on *toteutuva*, joss ψ on tosi ainakin yhdessä $\mathcal{L}$:n struktuurissa $\mathcal{A}$ (tällöin $\mathcal{A}$:ta kutsutaan ψ:n malliksi).

Esimerkki. $\exists x \forall y P(x, y)$ on toteutuva.
Olkoon $\mathcal{A}$:n universumi $A = \{1, 2\}$ ja $P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$.

Mallin käsite ja looginen seuraavuus

Määritelmä. Olkoon Σ joukko lauseita kielessä $\mathcal{L}$ ja olkoon $\mathcal{A}$ kielen $\mathcal{L}$ struktuuri. Struktuuri $\mathcal{A}$ *on lausejoukon* Σ *malli* (merkitään $\mathcal{A} \models \Sigma$), joss jokainen Σ:n lause on tosi $\mathcal{A}$:ssa.

Lausejoukko, jolla on ainakin yksi malli, on *toteutuva.*
Lausejoukko, jolla ei ole yhtään mallia, on *toteutumaton.*

Määritelmä. Kielen $\mathcal{L}$ lause ψ on $\mathcal{L}$:n lauseiden Σ *looginen seuraus* (merkitään $\Sigma \models \psi$), joss ψ on tosi jokaisessa Σ:n mallissa.

Väite. $\Sigma \models \psi$, joss $\Sigma \cup \{\neg \psi\}$ on toteutumaton.

Esimerkki. $\{\forall x P(x)\} \models \exists x P(x)$

Esimerkki

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \text{tentti(tiistai)} \\ \text{tentti(keskiviikko)} \\ \text{luento(keskiviikko)} \\ \forall x((\neg \text{tentti}(x) \wedge \neg \text{luento}(x)) \rightarrow \text{vapaa}(x)) \end{array} \right\}$$

Onko $\Sigma \models$ vapaa(perjantai)? Annetaan *vastamalli* $\mathcal{A}$, jonka perusteella $\Sigma \not\models$ vapaa(perjantai) (eli $\mathcal{A} \models \Sigma$ ja $\mathcal{A} \not\models$ vapaa(perjantai)). Olkoon universumi $A = \{t, k, p\}$.

$$\begin{array}{rclrcl} \text{tiistai}^{\mathcal{A}} & = & t & \text{keskiviikko}^{\mathcal{A}} & = & k \\ \text{perjantai}^{\mathcal{A}} & = & p & \text{tentti}^{\mathcal{A}} & = & \{t, k\} \\ \text{luento}^{\mathcal{A}} & = & \{k, p\} & \text{vapaa}^{\mathcal{A}} & = & \{\} \end{array}$$

Semanttiset taulut predikaattilogiikalle

$T(\forall x)\varphi(x)$ $\mid$ $T\varphi(t)$ t muuttujaton termi	$F(\exists x)\varphi(x)$ $\mid$ $F\varphi(t)$ t muuttujaton termi
$F(\forall x)\varphi(x)$ $\mid$ $F\varphi(c)$ c uusi vakio	$T(\exists x)\varphi(x)$ $\mid$ $T\varphi(c)$ c uusi vakio

Ohjeita semanttisten taulujen laadintaan

- Lauseen rakenne määrää edelleen, mitä taulusääntöä tulee käyttää (jäsennyspuun juuressa oleva konnektiivi).
- Solmujen hajoittamisjärjestyksellä voi usein vaikuttaa taulun kokoon (haarautumista kannattaa välttää).
- Muotoa $T(\exists x)\varphi(x)$ tai $F(\forall x)\varphi(x)$ olevat solmut tulee hajoittaa *kertaalleen* jollekin *uudelle vakiolle c.*
- Muotoa $T(\forall x)\varphi(x)$ tai $F(\exists x)\varphi(x)$ olevat solmut tulee (tarvittaessa) hajoittaa kaikille *muuttujattomille termeille t.*
- Valitsemalla muuttujattomat termit t sopivasti voidaan usein nopeuttaa taulun valmistumista. Valinta tulee suorittaa *hajoittamishetkellä* (eikä myöhemmin).

Määritelmä. Taulu τ on lauseen φ *todistus*, jos taulun τ juuressa on $F\varphi$ ja τ on ristiriitainen.
Jos lauseella φ on todistus, on φ *teoreema* (merkitään $\vdash \varphi$).

Määritelmä. Lause φ *on johdettavissa* äärellisestä lausejoukosta $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ (merkitään $\Sigma \vdash \varphi$), joss seuraava taulu on laajennettavissa ristiriitaiseksi:

$$\begin{array}{c} T\alpha_1 \\ | \\ \vdots \\ | \\ T\alpha_n \\ | \\ F\varphi \end{array}$$

Esimerkkejä

$\vdash \exists x \forall y \exists z \forall w \; P(x, y, z, w)$?

$$\begin{array}{c} F\exists x\forall y\exists z\forall w \; P(x,y,z,w) \\ | \\ F\forall y\exists z\forall w P(a,y,z,w) \\ | \\ F\exists z\forall w \; P(a,b,z,w) \\ | \\ F\forall w \; P(a,b,a,w) \\ | \\ FP(a,b,a,c) \\ | \\ F\forall y\exists z\forall w \; P(b,y,z,w) \\ | \\ \text{jne.} \end{array}$$

Talua ei saada valmiiksi,
joten lause ei ole todistuva
(eikä näinollen päteväkään).

$\{(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))\} \vdash P(a)$?

$$\begin{array}{c} T(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \\ | \\ FP(a) \\ | \\ T(P(b) \wedge Q(b)) \\ | \\ TP(b) \\ | \\ TQ(b) \end{array}$$

Taulu saatiin valmiiksi
muttei ristiriitaiseksi.
Lause ei ole johdettavissa.

$\{P(a), (\forall x)(P(x) \to Q(x))\} \vdash Q(a)$?

$T(\forall x)(P(x) \to Q(x))$

$TP(a)$

$FQ(a)$

$T(P(a) \to Q(a))$

$FP(a)$ $\otimes$ | $TQ(a)$ $\otimes$

Taulu on ristiiriitainen.
Lause on siis johdettavissa
(ja siten looginen seuraus).

Muita luennolla käsiteltyjä esimerkkejä (kommentti kertoo, mitä taulujen piirrettä on haluttu tuoda esille):

1. $\{\forall x P(x)\} \vdash \exists x P(x)$

   Valitaan termiksi esim. vakio a, vaikkei tämä esiinny lauseissa.

2. $\{\forall x P(x)\} \vdash P(a) \land P(b)$

   Sama solmu ($T\forall x P(x)$) hajoitetaan useaan kertaan.

3. $\{\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \land P(y,z) \to P(x,z)), P(a,b), P(b,c)\} \vdash P(a,c)$

   Oleellista x:n, y:n ja z:n korvaaminen oikeilla termeillä.

4. $\{\forall x P(x), \forall x (P(x) \to Q(x)), Q(a)\} \vdash \forall x Q(x)$

   Oleellista hajoitusjärjestys; ensin uusi vakio käyttöön.

Systemaattinen taulu

Lauselogiikka on *ratkeava*: on olemassa proseduureja, jotka

1. vastaavat KYLLÄ kun lause on pätevä
2. vastaavat EI kun lause ei ole pätevä

(Esim. totuustaulukot tai semanttinen taulu)

Predikaattilogiikka ei ole ratkeava, vaan *puoliratkeava*:

1. On olemassa proseduureja, jotka vastaavat KYLLÄ, kun syöte on pätevä lause.
2. Mikään tällainen proseduuri ei voi aina vastata EI, kun syöte ei ole pätevä lause (proseduuri ei anna vastausta ollenkaan).

Rakentamalla semanttiset taulut tietyllä tavalla systemaattisesti, voidaan taata, että taulu saadaan aina ristiriitaiseksi, kun sen juuressa on $F\varphi$ ja φ on pätevä.

Esimerkki. Luonnollisten lukujen $>$-relaatio.

$\forall x\ S(s(x), x)$ $\qquad$ $S(x,y) =$ "x on suurempi kuin y"

$\forall x \forall y (S(x,y) \to S(s(x), y))$ $\qquad$ $s(x) = x + 1$

Tarvitaan menetelmä, jolla generoidaan riittävä määrä kielen muuttujattomia termejä: $0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \ldots$

Jos taulussa esiintyy muotoa $T(\exists x)\varphi(x)$ tai $F(\forall x)\varphi(x)$ olevia solmuja, voidaan esimerkiksi indeksoimalla generoida riittävä määrä uusia vakioita: $c_0, c_1, c_2, \ldots$