Lauseiden klausuulimuoto

- Atomiset lauseet A ja niiden negaatiot $\neg A$ ovat *literaaleja*.
- Literaalin komplementti: $\overline{A} = \neg A$, $\overline{\neg A} = A$.
- Literaalien $l_1, \ldots, l_n$ disjunktio $l_1 \vee \cdots \vee l_n$ on *klausuuli*. Klausuulit kirjoitetaan usein muodossa $\{l_1, \ldots, l_n\}$.
- *Tyhjä klausuuli* $\Box$ on aina epätosi.
- Joukko klausuuleita S on tosi, jos kaikki sen alkiot ovat tosia. Tyhjä klausuulijoukko $\emptyset$ on aina tosi.

Klausuulijoukko $\{\{A, \neg B\}, \{\neg C, \neg A, D\}\}$ vastaa lausetta $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee D)$.

- *Totuusjakelu* $\mathcal{A}$ on joukko literaaleja siten, ettei millekään atomiselle lauseelle B sekä $B \in \mathcal{A}$ että $\neg B \in \mathcal{A}$ (*konsistenssi*).
- Totuusjakelu $\mathcal{A}$ on *täydellinen*, jos jokaiselle atomiselle lauseelle B joko $B \in \mathcal{A}$ tai $\neg B \in \mathcal{A}$.

  Täydellinen totuusjakelu vastaa valuaatiota $\mathcal{V}$, jolle $\mathcal{V}(B) = T$, kun $B \in \mathcal{A}$, ja $\mathcal{V}(B) = F$, kun $\neg B \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{A}$ *toteuttaa* klausuulijoukon S (merkitään $\mathcal{A} \models S$), joss kaikille klausuuleille $C \in S$ pätee $C \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

  Vastaavasti: valuaatio $\mathcal{V}$ toteuttaa lauseen α joss $\mathcal{V}(\alpha) = T$.
- Klausuulijoukko S on *toteutuva* jos on totuusjakelu $\mathcal{A}$ siten että $\mathcal{A} \models S$. Muuten S on *toteutumaton*.

Esimerkkejä

Olkoon $\mathcal{A} = \{A, \neg B\}$.

Nyt

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\models \{\{A, C, E\}, \{\neg A, \neg B\}\} \\ \mathcal{A} &\models \emptyset \\ \mathcal{A} &\not\models \{\{A, B\}, \{C\}\} \end{aligned}$$

Klausuulijoukot $\{\{A, C, E\}, \{\neg A, \neg B\}\}$ ja $\emptyset$ ovat toteutuvia.

Mutta $\{\{A\}, \{\neg A\}\}$ ja $\{\Box\}$ eivät ole toteutuvia.

Resoluutiosääntö

Olkoot $C_1 = \{l, l_1, \ldots, l_n\}$ ja $C_2 = \{\bar{l}, l'_1, \ldots, l'_m\}$ klausuuleja.

Klausuuli $C = \{l_1, \ldots, l_n, l'_1, \ldots, l'_m\}$ on C_1:n ja C_2:n *resolventti*.

Esimerkki

$$\{A, B, \neg C\} \qquad \{\neg A, D, \neg C\}$$

$$\{B, \neg C, D\}$$

Sääntöä on sovellettu literaaleihin A ja $\neg A$. Klausuulit ovat joukkoja, joten $\neg C$ esiintyy resolventissa $\{B, \neg C, D\}$ vain kerran.

Resoluutiotodistukset

Klausuulin C *johto* klausuulijoukosta S on äärellinen jono klausuuleja $C_1, \ldots, C_n$, missä $C_n = C$ ja jokaiselle C_i joko $C_i \in S$ tai C_i on joidenkin aikaisempien klausuulien resolventti.

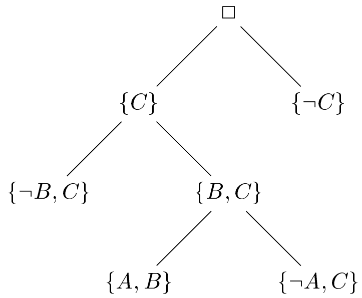
Jos klausuulijoukosta S voidaan johtaa tyhjä klausuuli $\square$, kyseistä johtoa kutsutaan S:n *refutaatioksi* (hylkäykseksi).

Esimerkkejä

$S = \{\{A, B\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, C\}, \{\neg C\}\}$

1.	$\{A, B\}$	S
2.	$\{\neg A, C\}$	S
3.	$\{\neg B, C\}$	S
4.	$\{\neg C\}$	S
5.	$\{B, C\}$	1, 2
6.	$\{C\}$	3, 5
7.	$\square$	4, 6

Resoluutiotodistuksen puuesitys



$S = \{\{A, B\}, \{\neg A, B\}, \{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg B\}\}$

1.	$\{A, B\}$	S
2.	$\{\neg A, B\}$	S
3.	$\{A, \neg B\}$	S
4.	$\{\neg A, \neg B\}$	S
5.	$\{B\}$	1, 2
6.	$\{\neg B\}$	3, 4
7.	$\square$	5, 6

Pätevyyden tutkiminen resoluutiolla

Väite. Lause α on pätevä joss $\neg\alpha$ on toteutumaton.

($\mathcal{V}(\neg\alpha) = F$ eli $\mathcal{V}(\alpha) = T$ kaikille valuaatioille $\mathcal{V}$).

Menettely: $\neg\alpha$ $\Rightarrow$ konjunktiiviseen normaalimuotoon
$\Rightarrow$ klausuulijoukoksi S
$\Rightarrow$ suoritetaan S:n refutaatio
$\Rightarrow$ S toteutumaton
$\Rightarrow$ $\neg\alpha$ toteutumaton
$\Rightarrow$ α pätevä

Onko $(A \to B) \land (\neg A \to C) \to (B \lor C)$ pätevä?

Negaation CNF on $(\neg A \lor B) \land (A \lor C) \land \neg B \land \neg C$.

Klausuulijoukkona $\{\{\neg A, B\}, \{A, C\}, \{\neg B\}, \{\neg C\}\}$.

1.	$\{\neg A, B\}$	S
2.	$\{A, C\}$	S
3.	$\{\neg B\}$	S
4.	$\{\neg C\}$	S
5.	$\{B, C\}$	1, 2
6.	$\{C\}$	3, 5
7.	$\Box$	4, 6

Lause on siis pätevä.

Loogisen seuraavuuden tutkiminen resoluutiolla

Väite. Lause α on lausejoukon Σ looginen seuraus, joss lausejoukko $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ on toteutumaton.

Menettely: $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ $\Rightarrow$ konjunktiiviseen normaalimuotoon
$\Rightarrow$ klausuulijoukoksi S
$\Rightarrow$ suoritetaan S:n refutaatio
$\Rightarrow$ S toteutumaton
$\Rightarrow$ $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ toteutumaton
$\Rightarrow$ α on Σ:n looginen seuraus

Onko A lausejoukon $\{\neg A \to B, B \lor C \to \neg B\}$ looginen seuraus?

lause	CNF	klausuuleina
$\neg A$	$\neg A$	$\{\{\neg A\}\}$
$\neg A \to B$	$A \lor B$	$\{\{A, B\}\}$
$B \lor C \to \neg B$	$(\neg B \lor \neg C) \land (\neg B \lor \neg B)$	$\{\{\neg B, \neg C\}, \{\neg B\}\}$

Näiden unioni: $S = \{\{\neg A\}, \{A, B\}, \{\neg B, \neg C\}, \{\neg B\}\}$

1.	$\{\neg A\}$	S
2.	$\{A, B\}$	S
3.	$\{\neg B, \neg C\}$	S
4.	$\{\neg B\}$	S
5.	$\{B\}$	1, 2
6.	$\Box$	4, 5

Vastaus: lause A on lausejoukon looginen seuraus.

Resoluution virheettömyys ja täydellisyys

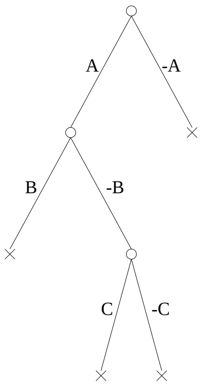
Väite. Jos S:llä on refutaatio, on S toteutumaton.

Todistus: Suoraan sillä perusteella, että jos on totuusjakelu $\mathcal{A}$ s.e. $\mathcal{A} \models C_1$ ja $\mathcal{A} \models C_2$, niin myös $\mathcal{A} \models C$ niiden resolventille C.

Väite. Jos S on toteutumaton, on S:llä refutaatio.

Todistuksen idea on annettu seuraavassa esimerkissä. Refutaatio voidaan hakea suorittamalla tapausanalyysi klausuulijoukossa esiintyvien atomisten lauseiden suhteen.

$S = \{A, B \vee C, \neg A \vee \neg B, \neg A \vee \neg C\}$



$\times$ tarkoittaa ristiriitaa
(joku S:n lauseista on epätosi).

Lineaarinen resoluutio

Lineaarisessa resoluutiossa rajoitetaan johdot klausuulijoukosta S seuraavanlaisiksi lineaarisiksi sekvensseiksi:

$$\begin{tikzcd}
B_0 \arrow[dr] & B_1 \arrow[dr] & B_2 \arrow[dr] & & \dots\ B_n \arrow[dr] & \\
C_0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & C_3\ \dots & C_n \arrow[r] & \square
\end{tikzcd}$$

- $C_0 \in S$ ja jokainen $B_i \in S$ tai $B_i = C_j$ jollekin $0 \leq j < i$.
- Jokainen C_{i+1} on klausuuleiden C_i ja B_i resolventti.

Lineaarisuusvaatimus ei vaikuta resoluution virheettömyys- ja täydellisyysominaisuuksiin.

Klausuulijoukko: $\{\{\neg A, B\}, \{A, C\}, \{\neg B\}, \{\neg C\}\}$

$$\begin{tikzcd}
\{\neg A, B\} \arrow[d] & \{A, C\} \arrow[dl] \\
\{B, C\} \arrow[d] & \{\neg B\} \arrow[dl] \\
\{C\} \arrow[d] & \{\neg C\} \arrow[dl] \\
\square &
\end{tikzcd}$$

Logiikkaohjelmat

- *Horn-klausuuli* on klausuuli, jossa on enintään yksi positiivinen literaali.

  Esim. $\{A\}$, $\{A, \neg B, \neg C\}$, $\{\neg D, \neg E, \neg F\}$.

  Prologin notaatiolla: `A.` `A :- B, C.` `:- D, E, F.`

- *Ohjelmaklausuuli* on klausuuli, jossa on täsmälleen yksi positiviinen literaali.

  Esim. $\{A\}$, $\{A, \neg B, \neg C\}$

- *Maaliklausuuli* on klausuuli jossa on vain negatiivisia literaaleja.

  Esim. $\{\neg D, \neg E, \neg F\}$

- *Prolog-ohjelma* on joukko ohjelmaklausuuleja.

LI/LD/SLD resoluutio

L=Linear

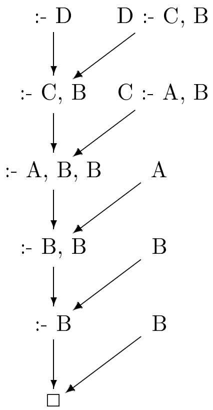
I=Input

D=Definite

S=Selection Function

```
A.
B.
C :- A, B.
D :- C, B.
```

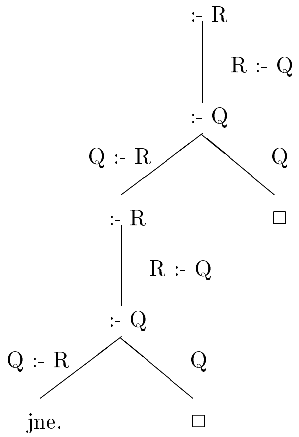
Kysely `:- D`



Väite. Jos S on toteutumaton Prolog-ohjelma (joukko ohjelmaklausuuleja + maaliklausuuli), niin S:lle on olemassa SLD-refutaatio.

- Tämä täydellisyysominaisuus menetetään Prologissa, jos käytetään syvyyshakua (kts. seuraava esimerkki).

Prologin hakuproseduurin epätäydellisyys



R :- Q.

Q :- R.

Q.

Kyselynä :- R.