Taulumenetelmän ominaisuuksia

Väite. Todistusmenetelmän virheettömyys: Jos lause α on todistettavissa semanttisella taululla ($\vdash \alpha$), niin α on pätevä ($\models \alpha$).

Väite. Todistusmenetelmän täydellisyys: Jos α on pätevä ($\models \alpha$), niin α on todistettavissa semanttisella taululla ($\vdash \alpha$).

Kirjassa osoitetaan, että:

- Jos α ei ole pätevä, niin jokaisessa α:n semanttisessa taulussa on ei-ristiriitainen polku.
- Jos α:n semanttisessa taulussa on ei-ristiriitainen polku, niin α ei ole pätevä.

Jos jollekin valuaatiolle $\mathcal{V}(\alpha) = F$, **niin** $F\alpha$:n taulussa on ei-ristiriitainen polku, jonka jokaiselle alkiolle $T\beta$, $\mathcal{V}(\beta) = T$ ja alkiolle $F\beta$, $\mathcal{V}(\beta) = F$ (todistus induktiolla).

$$
\begin{array}{ccc}
 & F((A \vee B) \to A) & \\
 & | & \\
 & T(A \vee B) & \\
 & | & \\
 & FA & \\
 & | & \\
 & T(A \vee B) & \\
 / & & \backslash \\
TA & & TB
\end{array}
$$

Esimerkissä $\mathcal{V}((A \vee B) \to A) = F$, $\mathcal{V}(A) = F$ ja $\mathcal{V}(B) = T$.

Jos $F\alpha$:n taulussa on ei-ristiriitainen polku, **niin** jollekin valuaatiolle $\mathcal{V}(\alpha) = F$.

Olkoon P mikä tahansa $F\alpha$:n ei-ristiriitainen polku.

Olkoon valuaatio $\mathcal{V}$ seuraavanlainen.

- $\mathcal{V}(A) = T$, jos TA on polussa P (A on atominen lause) ja
- $\mathcal{V}(A) = F$, muutoin.

Todistetaan induktiolla P:n alkioiden rakenteen suhteen, että $\mathcal{V}(\beta) = T$ kaikille $T\beta \in P$, ja $\mathcal{V}(\beta) = F$ kaikille $F\beta \in P$.

Perustapaus: TA tai FB, missä A, B ovat atomisia lauseita. Valuaation $\mathcal{V}$ määritelmän perusteella $\mathcal{V}(A) = T$ ja $\mathcal{V}(B) = F$.

Induktioaskel: Tutkitaan kaikki tapaukset $T(\alpha \wedge \beta), F(\alpha \wedge \beta), T(\alpha \vee \beta), F(\alpha \vee \beta), T(\alpha \to \beta), F(\alpha \to \beta), \ldots$.

- $F(\alpha \to \beta) \in P$, jolloin $T\alpha \in P$ ja $F\beta \in P$:

  Induktio-oletuksella $\mathcal{V}(\alpha) = T, \mathcal{V}(\beta) = F$.

  Totuustaulukkojen perusteella tällöin $\mathcal{V}(\alpha \to \beta) = F$.
- $T(\alpha \to \beta) \in P$, jolloin $F\alpha \in P$ tai $T\beta \in P$:

  Induktio-oletuksella $\mathcal{V}(\alpha) = F$ jos $F\alpha \in P$, tai $\mathcal{V}(\beta) = T$ jos $T\beta \in P$.

  Totuustaulukkojen perusteella tällöin $\mathcal{V}(\alpha \to \beta) = T$.
- muut kohdat samalla tavalla

Lauseen toteutuvuuden tutkiminen

Määritelmä. Lause α on *toteutuva*, jos ja vain jos on olemassa valuaatio $\mathcal{V}$ siten, että $\mathcal{V}(\alpha) = T$.

- Lause α on toteutuva, jos ja vain jos $T\alpha$:n semanttisessa taulussa on ainakin yksi ei-ristiriitainen polku ja
- lause α on toteutuva, jos ja vain jos $\neg\alpha$ **ei ole** pätevä.

Määritelmä. (Äärellinen) lausejoukko Σ on *toteutuva*, jos ja vain jos on olemassa valuaatio $\mathcal{V}$ siten, että $\mathcal{V}(\alpha) = T$ kaikille $\alpha \in \Sigma$.

- Äärellinen lausejoukko $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ on toteutuva, jos ja vain jos $T\alpha_1 - \cdots - T\alpha_n$:n semanttisessa taulussa on ainakin yksi ei ristiriitainen polku.

Esimerkki. Tutkitaan lauseen $(A \vee B) \rightarrow A$ toteutuvuutta.

$$
\begin{array}{ccc}
 & T((A \vee B) \rightarrow A) & \\
\swarrow & & \searrow \\
F(A \vee B) & & TA \\
| & & \\
FA & & \\
| & & \\
FB & &
\end{array}
$$

Ei-ristiriitaisista poluista voidaan muodostaa valuaatioita $\mathcal{V}$, joissa lause on tosi. Esim. valuaatiolle, jolle $\mathcal{V}(A) = F$ ja $\mathcal{V}(B) = F$ (vasen polku), pätee $\mathcal{V}((A \vee B) \rightarrow A) = T$. Tutkittava lause $(A \vee B) \rightarrow A$ on siis toteutuva (ts. ko. lauseella on malli).

Johdettavuus lausejoukosta

Tutkitaan lauseen β *johdettavuutta* äärellisestä lausejoukosta $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ (johdettavuutta merkitään $\Sigma \vdash \beta$).

Rakennetaan valmis semanttinen taulu edellisellä luennolla opittuun tapaan lähtien seuraavasta taulusta.

$$
\begin{array}{lll}
 & & T\alpha_1 \\
 & & | \\
 & \Sigma \models \beta & \vdots \\
\text{joss} & \Sigma \cup \{\neg\beta\} & | \\
 & \text{ei ole toteutuva} & T\alpha_n \\
\text{joss} & \Sigma \vdash \beta & | \\
 & & F\beta \\
 & & \vdots
\end{array}
$$

Hilbert-tyyppinen lauselogiikan aksiomatisointi

Aksioomat:

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
3. $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$

Päättelysääntö:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}$$

(modus ponens)

Määritelmä. Olkoon Σ joukko lauseita.

Todistus Σ:sta on jono lauseita $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ siten että kaikille $i \in \{1, \ldots, n\}$

- $\alpha_i \in \Sigma$,
- α_i on aksiooma tai
- α_i on saatu modus ponensilla lauseista $\alpha_j, j < i$ ja $\alpha_k = (\alpha_j \to \alpha_i), k < i$.

Lause α on *johdettavissa* Σ:sta, jos on olemassa todistus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Σ:sta ja $\alpha = \alpha_n$. ($\Sigma \vdash \alpha$)

Lause α on *teoreema* (todistuva) jos se on johdettavissa tyhjästä lausejoukosta $\Sigma = \emptyset$. ($\vdash \alpha$)

Esimerkki. Osoitetaan $\{A, B \to (A \to C)\} \vdash B \to C$.

1.	A	olettamus
2.	$B \to (A \to C)$	olettamus
3.	$A \to (B \to A)$	aksiooma 1
4.	$B \to A$	MP, 1, 3
5.	$(B \to (A \to C)) \to ((B \to A) \to (B \to C))$	aksiooma 2
6.	$(B \to A) \to (B \to C)$	MP, 2, 5
7.	$B \to C$	MP, 4, 6

Normaalimuodot

- Polynomien esittäminen muodossa:

$$c_0 \cdot x^0 + c_1 \cdot x^1 + \cdots + c_n \cdot x^n$$

- Lineaaristen yhtälöryhmien esittäminen matriiseina:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- Normaalimuotojen tarkoituksena on siis saattaa tutkittava asia sellaiseen yksinkertaiseen säännölliseen muotoon, jossa sen käsittely saadaan yksinkertaisemmaksi.

Määritelmä. Jos A on atominen lause, niin A ja $\neg A$ ovat *literaaleja.*

Määritelmä. Lause α on *konjunktiivisessa normaalimuodossa* jos α on muotoa $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_n$, ja kukin β_i on disjunktio $l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_{m_i}$, missä $l_1, l_2, \ldots, l_{m_i}$ ovat literaaleja.

Esimerkki.

$$(A_1 \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_3) \wedge (A_5 \vee A_6 \vee A_7)$$

$$A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3$$

$$(A_1 \vee \neg A_1) \wedge A_2$$

$$\neg A_7$$

$$A_1 \vee A_2 \vee A_3$$

Määritelmä. Lause α on *disjunktiivisessa normaalimuodossa* jos α on muotoa $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_n$, ja kukin β_i on konjunktio $l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_{m_i}$, missä $l_1, l_2, \ldots, l_{m_i}$ ovat literaaleja.

Esimerkki.

$$(\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_3 \wedge A_1) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$$
$$A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3$$
$$(A_1 \wedge \neg A_1) \vee A_2$$
$$\neg A_7$$
$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$$

Väite. Jokaiselle lauselogiikan lauseelle α on olemassa konjunktiivisessa (disjunktiivisessa) normaalimuodossa oleva lause β, joka on loogisesti ekvivalentti α:n kanssa.

Määritelmä. Sanotaan, että em. β on α:n konjunktiivinen (disjunktiivinen) normaalimuoto.

Esimerkki. $A \vee (\neg B \wedge C)$ on loogisesti ekvivalentti konjunktiivisessa normaalimuodossa olevan lauseen $(A \vee \neg B) \wedge (A \vee C)$ kanssa.

A	B	C	$\neg B$	$\neg B \wedge C$	$A \vee \neg B$	$A \vee C$	$A \vee (\neg B \wedge C)$	$(A \vee \neg B) \wedge (A \vee C)$
F	F	F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	T	T
T	T	T	F	F	T	T	T	T

Mikä hyvänsä lauselogiikan lause voidaan muuttaa konjunktiiviseen (disjunktiiviseen) normaalimuotoon seuraavalla menettelyllä.

1. Poista konnektiivit $\leftrightarrow$ seuraavanlaisilla korvauksilla:

$$\alpha \leftrightarrow \beta \quad \Rightarrow \quad (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \qquad (1)$$
$$\alpha \leftrightarrow \beta \quad \Rightarrow \quad (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha) \qquad (1')$$

2. Poista konnektiivit $\rightarrow$ seuraavanlaisilla korvauksilla:

$$\alpha \rightarrow \beta \quad \Rightarrow \quad \neg\alpha \vee \beta \qquad (2)$$

3. Siirrä negaatiot välittömästi atomisten lauseiden eteen:

$$\neg\neg\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \qquad (3)$$
$$\neg(\alpha \vee \beta) \quad \Rightarrow \quad \neg\alpha \wedge \neg\beta \qquad (4)$$
$$\neg(\alpha \wedge \beta) \quad \Rightarrow \quad \neg\alpha \vee \neg\beta \qquad (5)$$

4. (CNF) Lopuksi siirrä $\wedge$-konnektiivit $\vee$-konnektiivien ulkopuolelle:

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \quad \Rightarrow \quad (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \qquad (6)$$
$$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \quad \Rightarrow \quad (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \qquad (7)$$

Tai (DNF) siirrä $\vee$-konnektiivit $\wedge$-konnektiivien ulkopuolelle:

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \quad \Rightarrow \quad (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \qquad (8)$$
$$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \quad \Rightarrow \quad (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \qquad (9)$$

Normaalimuodon voi hakea myös taulumenetelmällä (selvittää lauseen mallit ja muodostaa disjunktiivisen normaalimuodon).

Lauseelle α saadaan konjunktiivinen normaalimuoto lauseen $\neg\alpha$ disjunktiivisesta normaalimuodosta sääntöjen (3)-(5) avulla.

Esimerkki. Muutetaan lause $(A \vee B) \rightarrow (B \leftrightarrow C)$ konjunktiiviseen normaalimuotoon.

$$(A \vee B) \rightarrow (B \leftrightarrow C)$$

$$(A \vee B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B)) \qquad (1)$$

$$\neg(A \vee B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \qquad (2)$$

$$(\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \qquad (4)$$

$$(\neg A \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \qquad (7)$$

$$((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \qquad (6)$$

$$((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge ((\neg B \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg B \vee (\neg C \vee B))) \qquad (6)$$

$$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee B)$$

Tutkimme aikaisemmin lauseen $(A \vee B) \rightarrow A$ toteutuvuutta ja pätevyyttä, joten käytössämme on sekä $T\alpha$:n että $T\neg\alpha$:n taulut ($T\neg\alpha$:n taulu saadaan liittämällä $T\neg\alpha$:n jatkoksi $F\alpha$:n taulu).

- $T\alpha$:n ristiriidattomat polut antavat vaatimukset FA, FB (vasen polku) ja TA (oikea polku). Näistä saadaan α:lle DNF $(\neg A \wedge \neg B) \vee A$.

- $T\neg\alpha$:n ainoa ristiriidaton polku antaa vaatimukset FA, TB. Tästä saadaan $\neg\alpha$:lle DNF $(\neg A \wedge B)$ ja α:lle CNF $(A \vee \neg B)$.

Kokeile näiden normaalimuotojen johtamista myös muunnossäännöillä !!!