Lauselogiikan semantiikka

- milloin lauselogiikan lause on *tosi* tai *epätosi*
- mitkä lauseet ovat *päteviä*
- mitkä lauseet ovat *toteutuvia*
- milloin lause on joidenkin toisten lauseiden *looginen seuraus*

Perustotuustaulukot

α	$\neg\alpha$
t	e
e	t

α	β	$(\alpha \wedge \beta)$
t	t	t
t	e	e
e	t	e
e	e	e

α	β	$(\alpha \vee \beta)$
t	t	t
t	e	t
e	t	t
e	e	e

α	β	$(\alpha \rightarrow \beta)$
t	t	t
t	e	e
e	t	t
e	e	t

α	β	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$
t	t	t
t	e	e
e	t	e
e	e	t

Esimerkki. Tutkittava lause: $(\neg B \wedge (A \rightarrow B))$
Alilauseet: $A, B, \neg B, (A \rightarrow B), (\neg B \wedge (A \rightarrow B))$
Sarakkeita: 5
Rivejä: $2^2 = 4$.

A	B	$\neg B$	$(A \rightarrow B)$	$(\neg B \wedge (A \rightarrow B))$
t	t	e	t	e
t	e	t	e	e
e	t	e	t	e
e	e	t	t	t

Konnektiivien määriteltävyys/riittävyys

Konnektiivit $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ eivät ole kaikki välttämättömiä:

- $\neg, \vee$ riittävät muiden konnektiivien määrittelemiseen
- $\neg, \wedge$ riittävät myös
- $\neg, \rightarrow$ riittävät myös

Esim.

- $(\alpha \wedge \beta)$ lauseena $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
- $(\alpha \rightarrow \beta)$ lauseena $(\neg\alpha \vee \beta)$ tai lauseena $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$
- $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ lauseena $((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta))$

Totuusjakelut ja valuaatiot

Määritelmä. *Totuusjakelu* on funktio kielen L *atomisten lauseiden joukolta* joukolle $\{T, F\}$ (totuusarvot tosi ja epätosi).

Määritelmä. *Valuaatio* on *konnektiivien totuustaulukkoja noudattava* funktio kielen L *lauseiden joukolta* joukolle $\{T, F\}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(A) &= T \\ \mathcal{V}(B) &= F \\ \mathcal{V}((A \wedge B)) &= F \end{aligned}$$

Totuusjakelu määrää yksikäsitteisesti lauseen totuusarvon:

Väite. Jokaiselle totuusjakelulle $\mathcal{A}$ on olemassa täsmälleen yksi valuaatio $\mathcal{V}$ siten että $\mathcal{V}(P) = \mathcal{A}(P)$ kaikille atomisille lauseille P.

Väite. Jos $\mathcal{V}_1(P) = \mathcal{V}_2(P)$ kaikille α:ssa esiintyville atomisille lauseille P, niin $\mathcal{V}_1(\alpha) = \mathcal{V}_2(\alpha)$.

A	B	$A \to B$	valuaatiot
t	t	t	$\mathcal{V}(A) = T,\quad \mathcal{V}(B) = T,\quad \mathcal{V}(C) = ?$
t	e	e	$\mathcal{V}(A) = T,\quad \mathcal{V}(B) = F,\quad \mathcal{V}(C) = ?$
e	t	t	$\mathcal{V}(A) = F,\quad \mathcal{V}(B) = T,\quad \mathcal{V}(C) = ?$
e	e	t	$\mathcal{V}(A) = F,\quad \mathcal{V}(B) = F,\quad \mathcal{V}(C) = ?$

Peruskäsitteitä

- **Määritelmä.** Valuaatio $\mathcal{V}$ on lauseen α *malli*, jos lause α on tosi valuaatiossa $\mathcal{V}$ eli $\mathcal{V}(\alpha) = T$.

  Esim. jos $\mathcal{V}(A) = T$, niin $\mathcal{V}$ on lauseen $A \vee B$ malli.

- **Määritelmä.** Lause α on *pätevä/tautologia* (merkitään $\models \alpha$), jos $\mathcal{V}(\alpha) = T$ kaikille valuaatiolle $\mathcal{V}$.

  Esim. $A \vee \neg A$ on pätevä.

- **Määritelmä.** Lause α on *toteutuva*, jos $\mathcal{V}(\alpha) = T$ jollekin valuaatiolle $\mathcal{V}$.

  Esim. $A \to B$ on toteutuva.

Esimerkkejä

Onko $A \vee \neg A$ pätevä?

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
t	e	t
e	t	t

Onko $A \to A \vee B$ pätevä?

A	B	$A \vee B$	$A \to A \vee B$
t	t	t	t
t	e	t	t
e	t	t	t
e	e	e	t

Onko $A \vee \neg A$ toteutuva?

Onko $A \to A \vee B$ toteutuva?

Lisää peruskäsitteitä

- **Määritelmä.** Lauseet α ja β ovat *loogisesti ekvivalentteja*, jos $\mathcal{V}(\alpha) = \mathcal{V}(\beta)$ kaikille valuaatioille $\mathcal{V}$.

  Esim. A and $\neg\neg A$ ovat loogisesti ekvivalentit.

- **Määritelmä.** Valuaatio $\mathcal{V}$ on (mahd. äärettömän) lausejoukon Σ *malli*, jos $\mathcal{V}(\sigma) = T$ kaikille lausejoukon Σ lauseille $\sigma \in \Sigma$.

- **Määritelmä.** Olkoon Σ (mahdollisesti ääretön) joukko lauseita. Lause α on Σ:n looginen seuraus (merkintään $\Sigma \models \alpha$), jos $\mathcal{V}(\alpha) = T$ kaikille lausejoukon Σ malleille $\mathcal{V}$.

  Esim. $\neg\neg A$ seuraa loogisesti lausejoukosta $\{A\}$.

Esimerkkejä

Onko $A \vee \neg B$ pätevä?

A	B	$\neg B$	$(A \vee \neg B)$
t	t	e	t
t	e	t	t
e	t	e	e
e	e	t	t

Onko $A \vee \neg B$ toteutuva?

Ovatko lauseet $A \to B$ ja $\neg B \to \neg A$ loogisesti ekvivalentit?

$\neg A$	$\neg B$	$A \to B$	$\neg B \to \neg A$
e	e	t	t
e	t	e	e
t	e	t	t
t	t	t	t

Seuraako $\neg B \to \neg A$ loogisesti lausejoukosta $\{A \to B\}$?

Seuraako lause D loogisesti lausejoukosta $\{A, (A \to D)\}$?

A	D	$(A \to D)$
t	t	t
t	e	e
e	t	t
e	e	t

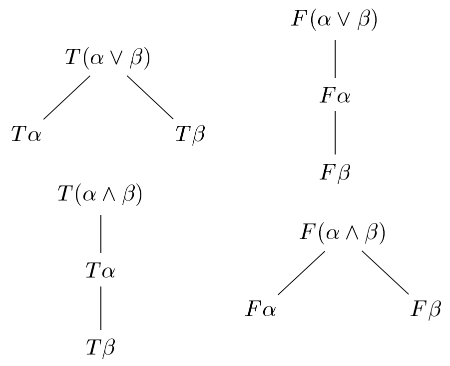
Seuraako lause B loogisesti lausejoukosta $\{(A \to B)\}$?

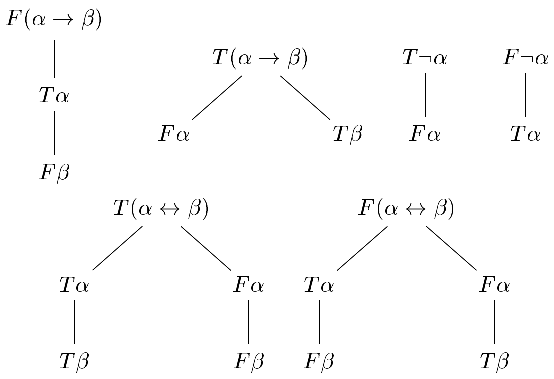
A	B	$(A \to B)$
t	t	t
t	e	e
e	t	t
e	e	t

Huomaa, että $\Sigma \models A \vee \neg A$ kaikille lausejoukoille Σ !!!

Lauselogiikan semanttinen taulu

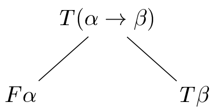
Atomiset taulut



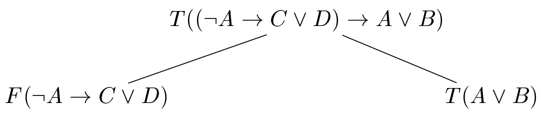


Atomisen taulun instantiointi

Lause γ: $(\neg A \to C \vee D) \to A \vee B$



γ on implikaatio $\alpha \to \beta$, missä $\alpha = \neg A \to C \vee D$ ja $\beta = A \vee B$



Äärellinen taulu

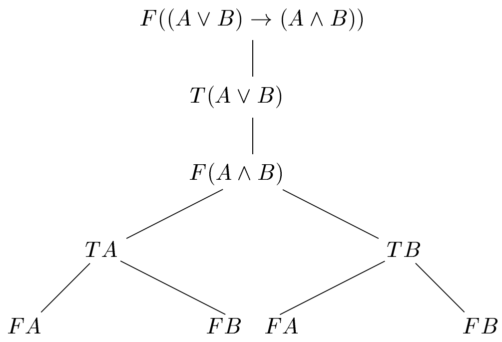
Määritelmä. *Äärellinen taulu* on binääripuu, jonka solmuina on T:llä ja F:llä merkittyjä lauseita (puun alkioita), ja joka on seuraavien ehtojen mukainen.

- Jokainen atominen taulu on äärellinen taulu.
- Jos τ on äärellinen taulu, P on polku τ:ssa, E on τ:n alkio polussa P, ja τ' on saatu τ:sta liittämällä E:n atominen taulu τ:hun polun P jatkoksi, niin τ' on myöskin äärellinen taulu.

Sopimus taulujen pienentämiseksi: kun atominen taulu liitetään polun jatkoksi, sen juurta ei kirjoiteta näkyviin.

(Kirjassa määritellään myös *äärettömät taulut*, joita emme lauselogiikan kohdalla tarvitse.)

Esimerkki.



Määritelmä. Olkoon τ taulu, P polku τ:ssa ja E polun P alkio.

1. E on *hajoitettu*, jos E:n atomisen taulun jonkun polun jokainen alkio on P:n alkio.
2. P on *ristiriitainen*, jos siinä esiintyy sekä $T\alpha$ että $F\alpha$ jollekin lauseelle α (tämän merkiksi kirjoitetaan usein $\times$ polun päähän).
3. P on *valmis*, jos se on ristiriitainen tai jokainen sen alkioista on hajoitettu.
4. τ on *valmis*, jos jokainen sen poluista on valmis.
5. τ on *ristiriitainen*, jos jokainen sen poluista on ristiriitainen.

Määritelmä. Taulu τ on lauseen α *todistus*, jos τ on ristiriitainen ja sen juuressa on $F\alpha$. Jos α:lla on todistus, on α *teoreema* ($\vdash \alpha$).

Esimerkki. Todistetaan lause $(A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)$.

$$\begin{array}{c} F((A \wedge B) \rightarrow (A \vee B)) \\ | \\ T(A \wedge B) \\ | \\ F(A \vee B) \\ | \\ TA \\ | \\ TB \\ | \\ FA \\ | \\ FB \\ \times \end{array}$$