Tik-79.144 **Syksy 1997**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 6
21. ja 23.10.1997

1. Määritellään predikaatit $L(x,y)$ (kaupungista x on lento kaupunkiin y) ja $Y(x,y)$ (kaupungista x on yhteys kaupunkiin y) seuraavalla tavalla:

$$\begin{array}{l} \forall x \forall y (L(x,y) \rightarrow L(y,x)) \\ \forall x \forall y (L(x,y) \rightarrow Y(x,y)) \\ \forall x \forall y \forall z (Y(x,y) \wedge L(y,z) \rightarrow Y(x,z)) \end{array}$$

Kirjoita tietokanta (predikaattikalkyylin lauseina), joka ilmaisee että Helsingistä on lennot Lontooseen, Rovaniemelle ja New Yorkiin, New Yorkista on lento Pariisiin, ja Pietarista on lento Berliiniin. Osoita analyyttisellä taululla, että Rovaniemeltä on yhteys Pariisiin.

2. Olkoot P ja Q kolmipaikkaisia predikaattisymboleja ja c vakiosymboli. Osoita semanttisella taululla lause:

$$\forall x \exists y \neg \forall z P(x,y,z) \leftrightarrow \forall x \exists y \exists z \neg P(x,y,z)$$

3. Tiedetään, että

(i) kaikki syylliset ovat valehtelijoita,
(ii) ainakin yksi syytetyistä on myös todistaja ja
(iii) yksikään todistaja ei valehtele.

Todista, etteivät kaikki syytetyt ole syyllisiä. Käytä semanttista taulua.

4. Olkoon R kaksipaikkainen predikaattisymboli, jonka tulkintana on relaatio $R^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$ (joukko A on struktuurin $\mathcal{A}$ universumi). Alla on taulukko lauseista, jotka määrittelevät relaatiolle $R^{\mathcal{A}}$ erilaisia ominaisuuksia.

Ominaisuus	Määritelmä
refleksiivisyys	$\forall x R(x,x)$
irrefleksiivisyys	$\forall x \neg R(x,x)$
symmetrisyys	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$
asymmetrisyys	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$
transitiivisyys	$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$
sarjallisuus	$\forall x \exists y R(x,y)$

Olkoon universumi A kaikkien ihmisten joukko. Anna esimerkkejä relaatioista $R^{\mathcal{A}}$, joilla on yllä määriteltyjä ominaisuuksia.