Tik-79.144 **Syksy 1996**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 6
Ratkaisut

1. Merkitään kaupunkeja vakiosymboleilla h (Helsinki), l (Lontoo), r (Rovaniemi), n (New York), pa (Pariisi), pi (Pietari) ja b (Berliini). Muodostetaan sitten tietokanta kaupunkien välisistä lennoista:

$$\{L(h,l), L(h,r), L(h,n), L(n,pa), L(pi,b)\}$$

Todistetaan semanttisella taululla, että tietokannan ja aksiomien

$$\begin{array}{l}\forall x \forall y (L(x,y) \to L(y,x)) \\ \forall x \forall y (L(x,y) \to Y(x,y)) \\ \forall x \forall y \forall z (Y(x,y) \wedge L(y,z) \to Y(x,z))\end{array}$$

perusteella Rovaniemeltä on yhteys Pariisiin (formalisoituna $Y(r,pa)$).

Huomaa, että aksiomissa esiintyvät universaalikvanttorit on instantioitu aina kerralla (yhdellä askeleella). Tämän taulutodistuksen "idea" löytyy haarasta, joka etenee ylhäältä alas. Siinä osoitetaan, että

(i) Rovaniemeltä on lento Helsinkiin,

(ii) Rovaniemeltä on yhteys Helsinkiin,

(iii) Rovaniemeltä on yhteys New Yorkiin ja

(iv) Rovaniemeltä on yhteys Pariisiin.

Ilman tätä strategiaa taulun haarojen sulkeminen on huomattavasti työläämpää.

$$
\begin{array}{l}
T(L(h,l)) \\
T(L(h,r)) \\
T(L(h,n)) \\
T(L(n,pa)) \\
T(L(pi,b)) \\
T(\forall x \forall y (L(x,y) \to L(y,x))) \\
T(\forall x \forall y (L(x,y) \to Y(x,y))) \\
T(\forall x \forall y \forall z (Y(x,y) \wedge L(y,z) \to Y(x,z))) \\
F(Y(r,pa))
\end{array}
$$

$$T(L(h,r) \to L(r,h))$$

$$
\begin{array}{cc}
F(L(h,r)) & T(L(r,h)) \\
\otimes &
\end{array}
$$

$$T(L(r,h) \to Y(r,h))$$

$$
\begin{array}{cc}
F(L(r,h)) & T(Y(r,h)) \\
\otimes &
\end{array}
$$

$$T(Y(r,h) \wedge L(h,n) \to Y(r,n))$$

$$
\begin{array}{cc}
F(Y(r,h) \wedge L(h,n)) & T(Y(r,n))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
F(Y(r,h)) & F(L(h,n)) & T(Y(r,n) \wedge L(n,pa) \to Y(r,pa)) \\
\otimes & \otimes &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
F(Y(r,n) \wedge L(n,pa)) & T(Y(r,pa)) \\
 & \otimes
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
F(Y(r,n)) & F(L(n,pa)) \\
\otimes & \otimes
\end{array}
$$

2. a) Taulutodistus on seuraava (vakiot $c_1, \ldots, c_6$ ovat uusia vakioita):

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{F(\forall x \exists y \neg \forall z P(x,y,z) \leftrightarrow \forall x \exists y \exists z \neg P(x,y,z))} \\
| & | \\
T(\forall x \exists y \neg \forall z P(x,y,z)) & F(\forall x \exists y \neg \forall z P(x,y,z)) \\
F(\forall x \exists y \exists z \neg P(x,y,z)) & T(\forall x \exists y \exists z \neg P(x,y,z)) \\
| & | \\
F(\exists y \exists z \neg P(c_1,y,z)) & F(\exists y \neg \forall z P(c_4,y,z)) \\
| & | \\
T(\exists y \neg \forall z P(c_1,y,z)) & T(\exists y \exists z \neg P(c_4,y,z)) \\
| & | \\
T(\neg \forall z P(c_1,c_2,z)) & T(\exists z \neg P(c_4,c_5,z)) \\
| & | \\
F(\exists z \neg P(c_1,c_2,z)) & F(\neg \forall z P(c_4,c_5,z)) \\
| & | \\
F(\forall z P(c_1,c_2,z)) & T(\neg P(c_4,c_5,c_6)) \\
| & | \\
F(P(c_1,c_2,c_3)) & T(\forall z P(c_4,c_5,z)) \\
| & | \\
F(\neg P(c_1,c_2,c_3)) & F(P(c_4,c_5,c_6)) \\
| & | \\
T(P(c_1,c_2,c_3)) & T(P(c_4,c_5,c_6)) \\
\otimes & \otimes
\end{array}
$$

b) Ratkaisu on varsin samanlainen kuin (a)-kohdassa.

$$F(\exists x \forall y (\forall z P(x,y,z) \vee Q(x,y,c)) \leftrightarrow \exists x \forall y \forall w (P(x,y,w) \vee Q(x,y,c)))$$

$$
\begin{array}{c|c}
T(\exists x \forall y (\forall z P(x,y,z) \vee Q(x,y,c))) & F(\exists x \forall y (\forall z P(x,y,z) \vee Q(x,y,c))) \\
F(\exists x \forall y \forall w (P(x,y,w) \vee Q(x,y,c))) & T(\exists x \forall y \forall w (P(x,y,w) \vee Q(x,y,c))) \\
T(\forall y (\forall z P(c_1,y,z) \vee Q(c_1,y,c))) & T(\forall y \forall w (P(c_4,y,w) \vee Q(c_4,y,c))) \\
F(\forall y \forall w (P(c_1,y,w) \vee Q(c_1,y,c))) & F(\forall y (\forall z P(c_4,y,z) \vee Q(c_4,y,c))) \\
F(\forall w (P(c_1,c_2,w) \vee Q(c_1,c_2,c))) & F(\forall z P(c_4,c_5,z) \vee Q(c_4,c_5,c)) \\
F(P(c_1,c_2,c_3) \vee Q(c_1,c_2,c)) & F(\forall z P(c_4,c_5,z)) \\
F(P(c_1,c_2,c_3)) & F(Q(c_4,c_5,c)) \\
F(Q(c_1,c_2,c)) & F(P(c_4,c_5,c_6)) \\
T(\forall z P(c_1,c_2,z) \vee Q(c_1,c_2,c))) & T(\forall w (P(c_4,c_5,w) \vee Q(c_4,c_5,c))) \\
 & T(P(c_4,c_5,c_6) \vee Q(c_4,c_5,c)) \\
\begin{array}{c|c}
T(\forall z P(c_1,c_2,z)) & T(Q(c_1,c_2,c))) \\
T(P(c_1,c_2,c_3)) & \otimes \\
\otimes &
\end{array}
&
\begin{array}{c|c}
T(P(c_4,c_5,c_6)) & T(Q(c_4,c_5,c)) \\
\otimes & \otimes
\end{array}
\end{array}
$$

3. Olkoon predikaatit $G(x)$ (x on syyllinen), $L(x)$ (x on valehtelija), $A(x)$ (x on syytetty) ja $W(x)$ (x on todistaja). Premissit ovat nyt $\forall x(G(x) \to L(x))$, $\exists x(A(x) \wedge W(x))$ ja $\forall x(W(x) \to \neg L(x))$. Haluttu johtopäätös on $\neg\forall x(A(x) \to G(x))$. Taulutodistus on seuraavanalainen.

$$T(\forall x(G(x) \to L(x)))$$
$$T(\exists x(A(x) \wedge W(x)))$$
$$T(\forall x(W(x) \to \neg L(x)))$$
$$F(\neg\forall x(A(x) \to G(x)))$$

$$T(\forall x(A(x) \to G(x)))$$

$$T(A(a) \wedge W(a))$$

$$T(A(a))$$
$$T(W(a))$$

$$T(A(a) \to G(a))$$

$$F(A(a)) \qquad T(G(a))$$
$$\otimes$$

$$T(W(a) \to \neg L(a))$$

$$F(W(a)) \qquad T(\neg L(a))$$
$$\otimes$$

$$F(L(a))$$

$$T(G(a) \to L(a))$$

$$F(G(a)) \qquad T(L(a))$$
$$\otimes \qquad \otimes$$