**Tik-79.144** **Syksy 1996**
**Logiikka tietotekniikassa: perusteet**
**Laskuharjoitus 5**
**Ratkaisut**

**1.** Ratkaisussa on käytetty useaan otteeseen rajoitettuja universaali- ja eksistentiaalikvanttoreita. Jos halutaan ilmaista, että jokin ominaisuus $\phi(x)$ pätee kaikille predikaatin $P(x)$ toteuttaville alkioille $x$, kirjoitetaan $\forall x(P(x) \rightarrow \phi(x))$. Se, että ominaisuus $\phi(x)$ pätee jollekin predikaatin $P(x)$ toteuttavalle alkiolle $x$, ilmaistaan lauseella $\exists x(P(x) \wedge \phi(x))$. Tehtävässä predikaatti $P(x)$ ilmaisee usein alkion tyyppiä (esim. $x$ on portti).

a) $\exists x(P(x) \wedge V(x))$, kun
$P(x) = x$ on portti.
$V(x) = x$ on viallinen.

b) $A(a) \wedge (\forall x(A(x) \wedge \neg(x = a) \rightarrow N(a, x))$, kun
$a =$ ko. algoritmi.
$A(x) = x$ on algoritmi.
$N(x, y) = x$ on $y$:tä nopeampi.

c) $\forall x(K(x) \rightarrow \exists y(T(y) \wedge R(x, y)))$, kun
$K(x) = x$ osallistuu kurssille.
$T(x) = x$ on työasema.
$R(x, y) = x$ käyttää $y$:tä.

d) $\forall x(T(x) \rightarrow \forall y \forall z(P(y) \wedge P(z) \wedge K(y, x) \wedge K(z, x) \rightarrow y = z))$, kun
$P(x) = x$ on prosessi.
$T(x) = x$ on tiedosto.
$K(x, y) = x$ kirjoittaa $y$:hyn.

Esitetyt ratkaisut eivät ole ainoita mahdollisia. Valinnan varaa on predikaatti-, funktio- ja vakiosymbolien määrittelyssä ja lauseiden rakenteessa.

**2.** a) Graafista meitä kiinnostavat erityisesti kaaret, joiden esittämistä varten määritellään predikaatti $K(x, y)$ (graafissa on kaari solmusta $x$ solmuun $y$). Värien esittämiseen on useita mahdollisuuksia.

(i) Yksi mahdollisuus on kiinnittää värien joukko ja esittää värit predikaatein. Jos joukossa $C$ on värejä $n$ kpl määritellään predikaatit $C_1(x), \ldots, C_n(n)$. Predikaatti $C_i(x)$ tarkoittaa, että solmu

$x$ on väriltään $C_i$. Ongelman määrittelyssä vaaditaan, että jokaisella solmulla on yksikäsitteinen väri ja että jos solmujen välillä on kaari, solmut ovat eri väriset. Ensimmäisestä vaatimuksesta saadaan lauseet

$$\forall x(C_i(x) \leftrightarrow \neg C_1(x) \wedge \cdots \wedge \neg C_{i-1}(x) \wedge \neg C_{i+1} \wedge \cdots \wedge \neg C_n(x))$$

indeksin $i$ arvoilla $1, \ldots, n$ (huomaa, että $\neg C_i(x)$ ei esiinny ekvivalenssin oikean puolen konjuktiossa). Toinen vaatimus esitetään jokaisen predikaatin $C_i(x)$ osalta erikseen:

$$\forall x \forall y(K(x, y) \rightarrow (C_i(x) \rightarrow \neg C_i(y))).$$

(ii) Toinen mahdollisuus on jättää värien määrittely avoimeksi ja ottaa käyttöön predikaatti $V(x, y)$ (solmun $x$ väri on $y$). Solmun värin yksikäsitteisyys voidaan ilmaista lauseella

$$\forall x \forall y \forall z(V(x, y) \wedge V(x, z) \rightarrow y = z).$$

Siis, jos solmulla $x$ on värit $y$ ja $z$, nämä ovat itse asiassa sama väri (yhtäsuuruus predikaatti $=$ on tosi rakenteessa $\mathcal{A}$, jos ja vain jos predikaatin argumenttien tulkinnat ovat samat rakenteessa $\mathcal{A}$). Vierekkäisten solmujen erivärisyys saadaan puettua lauseeksi

$$\forall x \forall y \forall z(K(x, y) \rightarrow (V(x, z) \rightarrow \neg V(y, z)).$$

Eli, jos graafissa on kaari solmusta $x$ solmuun $y$ ja solmu $x$ on väriltään $z$, solmu $y$ ei ole väriltään $z$.

(iii) Kolmantena mahdollisuutena on esittää väri funktiosymbolin $v$ avulla. Termi $v(x)$ tarkoittaa solmun $x$ väriä. Tässä tapauksessa värin yksikäsitteisyyttä ei tarvitse erikseen määritellä (funktion arvo on aina yksikäsitteinen). Erivärisyydelle saadaan lause

$$\forall x \forall y(K(x, y) \rightarrow \neg(v(x) = v(y))).$$

b) Annetaan malli kohdan (i) lauseille tapauksessa $n = 2$. Määritellään rakenne $\mathcal{A}$, jonka universumina on $A = \{a_1, a_2\}$ (kaksi solmua). Predikaatin $K$ tulkinta on $K^{\mathcal{A}} = \{\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_2, a_1\rangle\}$ (graafissa on kaaret solmusta $a_1$ solmuun $a_2$ ja solmusta $a_2$ solmuun $a_1$). Predikaattien $C_1$ ja $C_2$ tulkinnat ovat $C_1^{\mathcal{A}} = \{a_1\}$ ja $C_2^{\mathcal{A}} = \{a_2\}$ (toinen solmuista on siis väriä $C_1$ ja toinen väriä $C_2$). Lisäksi joudumme olettamaan, että kieleen sisältyy vakiosymbolit $s_1$ ja $s_2$,

joiden tulkintoina rakenteessa $\mathcal{A}$ ovat $a_1$ ja $a_2$. Tämä johtuu rakenteen määritelmästä, jossa edellytetään että kaikille universumin $A$ alkioille $a$ on olemassa muuttujaton termi, siten että $t^{\mathcal{A}} = a$ (jokainen universumin alkio on täten esitettävissä jollain termillä eli "nimettävissä").

Tarkistetaan nyt totuusmääritelmän avulla, että lauseet

$$\forall x(C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$$

$$\forall x \forall y(K(x,y) \rightarrow (C_1(x) \rightarrow \neg C_1(y))$$

ja

$$\forall x \forall y(K(x,y) \rightarrow (C_2(x) \rightarrow \neg C_2(y))$$

toteutuvat rakenteessa $\mathcal{A}$ (eli $\mathcal{A}$ on lauseiden malli). Huomaa että lauseista ensimmäinen on ekvivalentti lauseen

$$\forall x(C_2(x) \leftrightarrow \neg C_1(x))$$

kanssa, joka myös kuuluu lausejoukkoon tapauksessa $n = 2$. Koska $s_1$ ja $s_2$ ovat ainoat termit,

$$\mathcal{A} \models \forall x(C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$$

jos ja vain jos

$$\mathcal{A} \models (C_1(s_1) \leftrightarrow \neg C_2(s_1)) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{A} \models (C_1(s_2) \leftrightarrow \neg C_2(s_2))$$

Koska $s_1^{\mathcal{A}} \in C_1^{\mathcal{A}}$,

$$\mathcal{A} \models C_1(s_1)$$

ja koska $s_1^{\mathcal{A}} \notin C_2^{\mathcal{A}}$,

$$\mathcal{A} \not\models C_2(s_1)$$

Siis

$$\mathcal{A} \models (C_1(s_1) \leftrightarrow \neg C_2(s_1))$$

Vastaavasti osoitetaan, että $\mathcal{A} \models (C_1(s_2) \leftrightarrow \neg C_2(s_2))$, joten $\mathcal{A} \models \forall x(C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x))$ seuraa.

Vastaavasti

$$\mathcal{A} \models \forall x \forall y(K(x,y) \rightarrow (C_1(x) \rightarrow \neg C_1(y))$$

jos ja vain jos lauseet

$$K(s_1, s_1) \to (C_1(s_1) \to \neg C_1(s_1)),$$
$$K(s_1, s_2) \to (C_1(s_1) \to \neg C_1(s_2)),$$
$$K(s_2, s_1) \to (C_1(s_2) \to \neg C_1(s_1)) \text{ ja}$$
$$K(s_2, s_2) \to (C_1(s_2) \to \neg C_1(s_2))$$

ovat tosia rakenteessa $A$. Koska parit $\langle s_1^{\mathcal{A}}, s_1^{\mathcal{A}} \rangle$ ja $\langle s_2^{\mathcal{A}}, s_2^{\mathcal{A}} \rangle$ eivät kuulu tulkintaan $K^{\mathcal{A}}$, atomiset lauseet $K(s_1, s_1)$ ja $K(s_2, s_2)$ ovat epätosia rakenteessa $\mathcal{A}$, joten implikaation totuusmääritelmän perusteella edellä annetuista neljästä lauseesta ensimmäinen ja viimeinen ovat tosia rakentessa $\mathcal{A}$. Koska pari $\langle s_1^{\mathcal{A}}, s_2^{\mathcal{A}} \rangle$ kuuluu tulkintaan $K^{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \models K(s_1, s_2)$ ja lauseista toinen on tosi rakenteessa $\mathcal{A}$, jos ja vain jos $\mathcal{A} \models C_1(s_1) \to \neg C_1(s_2)$. Tämä pitää paikkansa, sillä $s_1^{\mathcal{A}} \in C_1^{\mathcal{A}}$ ja $s_2^{\mathcal{A}} \notin C_1^{\mathcal{A}}$, joten $\mathcal{A} \models C_1(s_1)$ ja $\mathcal{A} \models \neg C_1(s_2)$. Myös kolmas lause toteutuu. Erona edelliseen on, että implikaatio $C_1(s_2) \to \neg C_1(s_1)$ on tosi rakenteessa $\mathcal{A}$, koska $\mathcal{A} \not\models C_1(s_2)$. Siis $\mathcal{A}$ on malli lauseelle $\forall x \forall y(K(x, y) \to (C_1(x) \to \neg C_1(y))$.

Symmetriasyistä $\mathcal{A}$ on myös lauseen $\forall x \forall y(K(x, y) \to (C_2(x) \to \neg C_2(y))$ malli. Olemme siis osoittaneet, että $\mathcal{A}$ on lausejoukon malli. Sama rakenne on malli myös tapauksesa, jossa värejä on useampia kuin kaksi.

Malleista tulee monimutkaisempia, jos solmujen väritys esitetään vaihtoehtojen (ii) ja (iii) mukaisesti.

c) Määritellään rakenne $\mathcal{A}$ tapauksessa $n = 2$, jossa lausejoukko ei toteudu. Valitaan universumiksi $A = \{a\}$ (yksi solmu) ja predikaatin $K$ tulkinnaksi esim. $K^{\mathcal{A}} = \{\langle a, a \rangle\}$. Olkoon $s$ vakiosymboli, jonka tulkintana on $a$. Nyt

$$\forall x(C_1(x) \leftrightarrow \neg C_2(x)$$

ei toteudu rakenteessa $\mathcal{A}$, jos

$$\mathcal{A} \not\models C_1(s) \leftrightarrow \neg C_2(s)$$

Valitaan siis väripredikaattien tulkinnat siten, että

$$\mathcal{A} \models C_1(s) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{A} \models C_2(s)$$

asettamalla

$$C_1^{\mathcal{A}} = C_2^{\mathcal{A}} = \{a\}$$

Tällöin $\mathcal{A}$ ei voi olla lausejoukon malli.