Vastamallien konstruoinnista

Toisessa kotitehtävässä pyydetään antamaan struktuuri, jossa predikaattilogiikan lause on epätosi (halutaan siis *vastaesimerkkiä* lauseen pätevyydelle).

Jos lauseessa esiintyvät predikaatit ovat yksipaikkaisia, lauseelle voidaan antaa luonnollinen joukko-opillinen tulkinta.

Esimerkki. Tarkastellaan lausetta $\phi = \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$.

Olkoon $\mathcal{A}$ struktuuri ja t muuttujaton termi. Nyt $\mathcal{A} \models P(t)$ täsmälleen silloin, kun $t^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$. Vastaavasti $\mathcal{A} \models Q(t)$, jos ja vain jos $t^{\mathcal{A}} \in Q^{\mathcal{A}}$. Siis $\mathcal{A} \models \phi$, jos ja vain jos $P^{\mathcal{A}} \subseteq Q^{\mathcal{A}}$.

Lause ϕ ei ole pätevä. Vastamalli saadaan esim. asettamalla struktuurin universumksi $A = \{a\}$ ja valitsemalla tulkinnat $P^{\mathcal{A}} = \{a\}$ ja $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$ siten, ettei $P^{\mathcal{A}} \subseteq Q^{\mathcal{A}}$ toteudu.

Vastamallin konstruoinnissa voidaan hyödyntää myös semanttisen taulun ristiriidattomasta haarasta saatavia vaatimuksia.

$$\begin{array}{c} F(\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))) \\ | \\ F(P(c) \rightarrow Q(c)) \\ | \\ T(P(c)) \\ | \\ F(Q(c)) \end{array}$$

Taulun ristiriidattoman haaran perusteella riittää, että struktuurin universumissa A on yksi alkio $c^{\mathcal{A}} = a$ siten, että $a \in P^{\mathcal{A}}$ ja $a \notin Q^{\mathcal{A}}$. Tämä toteutuu mm. valinnoilla $P^{\mathcal{A}} = \{a\}$ ja $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$.

Menettely on käyttökelpoinen erityisesti, jos *valmiin taulun* ristiriidaton haara on *äärellinen* (kuten yllä).

Yksi mahdollisuus on konstruoida vastamalliksi Herbrand-struktuuri taulun ristiriidattoman haaran perusteella.

Esimerkki. Esimerkin tapauksessa universumi $H = \{c\}$ ja $\mathcal{H} = \{P(c), \neg Q(c)\}$, joka on saatu ristiriidattoman haaran asettamista vaatimuksista $T(P(c))$ ja $F(Q(c))$.

Esimerkki. Lisäää joukko-opillisia tulkintoja (A on universumi):

$\forall x\ (P(x))$	saa tulkinnan	$P^{\mathcal{A}} = A$
$\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	"	$P^{\mathcal{A}} \subseteq \overline{Q^{\mathcal{A}}} = A - Q^{\mathcal{A}}$
$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$	"	$P^{\mathcal{A}} \cap Q^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$
$\forall x\ (P(x) \vee Q(x) \rightarrow R(x))$	"	$P^{\mathcal{A}} \cup Q^{\mathcal{A}} \subseteq R^{\mathcal{A}}$

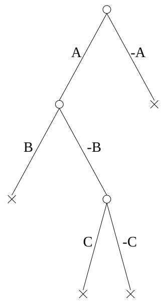
Vastamallit kannattaa muodostaa mahdollisimman yksinkertaisiksi.

Joukko-opillinen tulkinta	Vastamalli (ei toteuta tulkintaa)
$P^{\mathcal{A}} = A$	$A = \{a\}$, $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$
$P^{\mathcal{A}} \subseteq \overline{Q^{\mathcal{A}}} = A - Q^{\mathcal{A}}$	$A = \{a\}$, $P^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}} = \{a\}$
$P^{\mathcal{A}} \cap Q^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$	$A = \{a\}$, $P^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$
$P^{\mathcal{A}} \cup Q^{\mathcal{A}} \subseteq R^{\mathcal{A}}$	$A = \{a\}$, $P^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{A}} = \emptyset$, $Q^{\mathcal{A}} = \{a\}$

Huono ratkaisuproseduuri

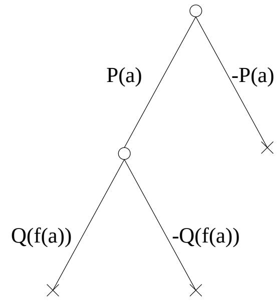
1. Muutetaan ϕ:n negaatio klausuulijoukoksi S. Esim.
   $(\exists y \forall x\ (P(x,y) \wedge P(f(x),x))) \rightarrow (\forall x \exists y\ P(x,y))$ joukoksi
   $S = \{\{\neg P(c_1,x)\},\{P(x,c_2)\},P(x,f(x))\}$.
2. Tuotetaan joukkoja
   $H_0 = \{c_1,c_2\}$, $H_1 = \{c_1,c_2,f(c_1),f(c_2)\}$ ...
   $H_\infty = \{c_1,c_2,f(c_1),f(c_2),f(f(c_1)),f(f(c_2)),\ldots\}$
3. Tuotetaan joukkoja S_i', missä S_i on saatu S:stä korvaammalla S:n muuttujat termeillä joukosta H_i. Hebrandin teoreeman perusteella jollain askeleella j joukko S_j' ond toteutumaton joss S on toteutumaton.

Esimerkki. $S = \{A, B \vee C, \neg A \vee \neg B, \neg A \vee \neg C\}$.



Puu olisi pienempi jos kahden $\times$-solmujen isä olisi $\times$-solmu. Näin olisi, jos joukkoon S kuuluisi klausuuleista $\neg A \vee \neg C$ ja $B \vee C$ saatava klausuuli $\neg A \vee B$.

Esimerkki. $S = \{P(x), \neg P(x) \vee Q(f(x)), \neg Q(f(a))\}$.



Puu olisi pienempi jos $\times$-solmujen isä olisi $\times$-solmu. Näin olisi, jos joukkoon S kuuluisi klausuuleista $\neg Q(f(a))$ ja $\neg P(x) \vee Q(f(x))$ saatava klausuuli $\neg P(a)$.

Predikaattilogiikan resoluutiosääntö

Olkoot C_1 ja C_2 klausuuleja, joissa *ei ole yhteisiä* muuttujia, ja jotka ovat muotoa $C_1' \cup \{P\vec{t_1}, P\vec{t_2}, \ldots, P\vec{t_n}\}$ ja $C_2' \cup \{\neg P\vec{s_1}, \neg P\vec{s_2}, \ldots, \neg P\vec{s_m}\}$.

Jos σ on joukon $\{P\vec{t_1}, P\vec{t_2}, \ldots, P\vec{t_n}, P\vec{s_1}, P\vec{s_2}, \ldots, P\vec{s_m}\}$ yleisin unifioija, niin $C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$ on C_1:n ja C_2:n resolventti.

Esimerkki

Olkoot

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{Q(x), \neg R(y), P(x,y), P(f(z), f(z))\} \\
C_2 &= \{\neg N(u), \neg R(w), \neg P(f(a), f(a)), \neg P(f(w), f(w))\}
\end{aligned}
$$

Joukon $\{P(x,y), P(f(z), f(z)), P(f(a), f(a)), P(f(w), f(w))\}$ yleisin unifioija on $\sigma = \{x/f(a), y/f(a), z/a, w/a\}$.

Klausuulien resolventti on $\{Q(f(a)), \neg R(f(a)), \neg N(u), \neg R(a)\}$.

Väite.(Resoluution täydellisyys) Klausuulijoukko S on toteutumaton jos ja vain jos S:stä päästään resoluutiosäännöllä tyhjään klausuuliin $\Box$.

Väite. $\models \phi$ jos ja vain jos lauseen $\neg\phi$ klausuulimuodosta saadaan resoluutiolla tyhjä klausuuli $\Box$.

Väite. $\Sigma \models \phi$ jos ja vain jos lausejoukon $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ klausuulimuodosta saadaan resoluutiolla tyhjä klausuuli $\Box$.

Osoita $P(a) \wedge \neg Q(a) \wedge \forall x(P(x) \to Q(x))$ toteutumattomaksi.

1.	$\{P(a)\}$	P
2.	$\{\neg Q(a)\}$	P
3.	$\{\neg P(x), Q(x)\}$	P
4.	$\{Q(a)\}$	klausuulien 1 ja 3 resolventti
5.	$\Box$	klausuulien 2 ja 4 resolventti

Osoita $\models \forall x P(x) \to \exists x P(x)$.

$\neg(\forall x P(x) \to \exists x P(x))$

$\neg(\neg\forall x P(x) \vee \exists x P(x))$

$\forall x P(x) \wedge \neg\exists x P(x)$

$\forall x P(x) \wedge \forall x \neg P(x)$

$\forall x_1 \forall x_2 (P(x_1) \wedge \neg P(x_2))$

Klausuuleista $\{P(x_1)\}$ ja $\{\neg P(x_2)\}$ saadaan yhdellä askeleella $\Box$.

$\phi = \forall x(I(x) \to E(x))$

$\psi = \exists x(I(x) \wedge K(x))$

$\chi = \exists x(E(x) \wedge K(x))$.

$\{\phi, \psi\} \models \chi$?

$\forall x(I(x) \to E(x)) \wedge \exists x(I(x) \wedge K(x)) \wedge \neg\exists x(E(x) \wedge K(x))$

$\forall x(I(x) \to E(x)) \wedge \exists x(I(x) \wedge K(x)) \wedge \forall x(\neg(E(x) \wedge K(x)))$

$\forall x(I(x) \to E(x)) \wedge (\exists x \forall y((I(x) \wedge K(x)) \wedge (\neg(E(y) \wedge K(y)))))$

$\forall x \exists z((I(x) \to E(x)) \wedge \forall y((I(z) \wedge K(z)) \wedge (\neg(E(y) \wedge K(y)))))$

$\forall x \exists z \forall y((I(x) \to E(x)) \wedge ((I(z) \wedge K(z)) \wedge (\neg(E(y) \wedge K(y)))))$

$\forall x \exists z \forall y((\neg I(x) \vee E(x)) \wedge I(z) \wedge K(z) \wedge (\neg E(y) \vee \neg K(y)))$

$\forall x \forall y((\neg I(x) \vee E(x)) \wedge I(f(x)) \wedge K(f(x)) \wedge (\neg E(y) \vee \neg K(y)))$

1.	$\{\neg I(x), E(x)\}$	P
2.	$\{I(f(x))\}$	P
3.	$\{K(f(x))\}$	P
4.	$\{\neg E(y), \neg K(y)\}$	P
5.	$\{E(f(x))\}$	1 $\{x/y\}$, 2, MGU $\{y/f(x)\}$
6.	$\{\neg K(f(x))\}$	4, 5, MGU $\{y/f(x)\}$
7.	$\square$	3, 6, MGU ϵ

Kerrossaturaatiostrategia

$$\begin{aligned} S_0 &= S \\ S_i &= \{C \mid C \text{ saadaan resoluutiolla klausuuleista} \\ &\qquad C_1 \in S_0 \cup \cdots \cup S_{i-1} \text{ ja } C_2 \in S_{i-1}\} \end{aligned}$$

Esimerkki:

$$\begin{aligned} S_0 &= \{\{\neg I(x), E(x)\}, \{I(f(x))\}, \{K(f(x))\}, \{\neg E(y), \neg K(y)\}\} \\ S_1 &= \{\{E(f(x))\}, \{\neg E(f(x))\}, \{\neg I(x), \neg K(x)\}\} \\ S_2 &= \{\square, \{\neg I(f(x))\}, \{\neg K(f(x))\}\} \\ S_3 &= \{\square\} \\ S_4 &= \{\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tukijoukkostrategia

Määritelmä. S:n osajoukko T on *tukijoukko* (set-of-support), jos $S - T$ on toteutuva.

Tukijoukkostrategiassa ei milloinkaan suoriteta resoluutiota joukon $S - T$ klausuuleille keskenään.

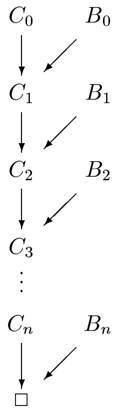
Ajatus: olettamusten joukko on toteutuva. T on johdettavaa lausetta vastaavien klausuulien joukko, $S - T$ olettamuksia vastaavat klausuulit.

Väite. Tukijoukkoresoluutio on täydellinen strategia.

Alla klausuuli 4 muodostaa tukijoukon.

1.	$\{\neg I(x), E(x)\}$	P
2.	$\{I(f(x))\}$	P
3.	$\{K(f(x))\}$	P
4.	$\{\neg E(y), \neg K(y)\}$	P
5.	$\{\neg E(f(x))\}$	3, 4, MGU $\{y/f(x)\}$
6.	$\{\neg I(f(x))\}$	1 $\{x/y\}$, 5, MGU $\{y/f(x)\}$
7.	$\square$	2, 6, MGU ϵ

Lineaarinen resoluutio

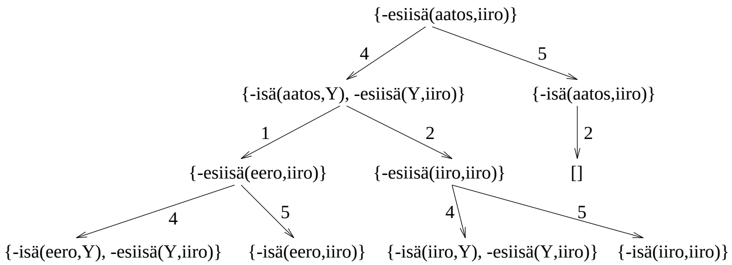


Olkoon S klausuulijoukko. Vieressä oleva on johto lineaarisella resoluutiolla, jos C_0 on S:n klausuuli (mahdollisesti uudelleennimettynä) ja kukin B_i on joko S:n tai joukon $\{C_0, \ldots, C_{i-1}\}$ klausuuli (mahdollisesti uudelleennimettynä).

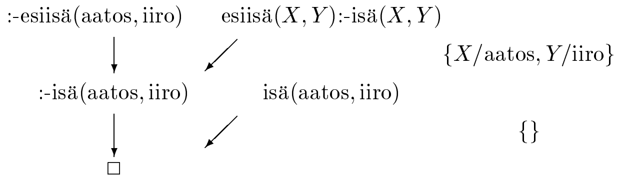
Esimerkki

```
isä(aatos,eero).
isä(aatos,iiro).
isä(oiva,aatos).

esiisä(X,Z) :- isä(X,Y), esiisä(Y,Z).
esiisä(X,Y) :- isä(X,Y).

isoisä(X,Z) :- isä(X,Y), isä(Y,Z).
```


Prologin hakupuu



Tuloksena saatava lineaarinen resoluutiotodistus



Vastauksena sidokset kyselyn muuttujille

$$\begin{tikzcd}
\text{:-isoisä}(X, \text{eero}) \arrow[dd] & \text{isoisä}(X, Z)\text{:-isä}(X, Y), \text{isä}(Y, Z) \arrow[ddl] & \\
 & & \{Z/\text{eero}\} \\
\text{:-isä}(X, Y), \text{isä}(Y, \text{eero}) \arrow[dd] & \text{isä}(\text{oiva}, \text{aatos}) \arrow[ddl] & \\
 & & \{X/\text{oiva}, Y/\text{aatos}\} \\
\text{:-isä}(\text{aatos}, \text{eero}) \arrow[dd] & \text{isä}(\text{aatos}, \text{eero}) \arrow[ddl] & \\
 & & \\
\square & &
\end{tikzcd}$$

Unifioijien kompositio: $\{Z/\text{eero}, X/\text{oiva}, Y/\text{aatos}\}$