Prenex-normaalimuoto

Predikaattilogiikan lause α joka on muotoa $\mathcal{Q}_1 x_1 \mathcal{Q}_2 x_2 \cdots \mathcal{Q}_n x_n \phi$, missä $\mathcal{Q}_i$ ovat kvanttoreita $\forall$ tai $\exists$, ja ϕ ei sisällä kvanttoreita, on *prenex*-normaalimuodossa.

Esimerkki.

$\forall x P(x)$ $\qquad$ $\forall x \exists y \; P(x,y)$

$\forall x \exists y \forall z \forall w (P(x,y,z) \to (Q(y,z,w) \to R(z,w,x)))$ $\qquad$ $P(a)$

Väite. Jokainen predikaattilogiikan lause on loogisesti ekvivalentti jonkin prenex-normaalimuodossa olevan lauseen kanssa.

Lauseiden muuttaminen prenex-normaalimuotoon

Poistetaan konnektiivit $\to$ ja $\leftrightarrow$:

$$\begin{aligned} \phi \to \psi &\Rightarrow \neg\phi \vee \psi \\ \phi \leftrightarrow \psi &\Rightarrow (\neg\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg\psi) \end{aligned}$$

Negaatiot sisään, kvanttorit ulos (z on uusi muuttuja):

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \vec{\mathcal{Q}}x \neg\forall y \varphi & \Rightarrow & \vec{\mathcal{Q}}x \exists y \neg\varphi & \vec{\mathcal{Q}}x \neg\exists y \varphi & \Rightarrow & \vec{\mathcal{Q}}x \forall y \neg\varphi \\ \neg\neg\varphi & \Rightarrow & \varphi & \neg(\varphi \vee \psi) & \Rightarrow & \neg\varphi \wedge \neg\psi \\ \neg(\varphi \wedge \psi) & \Rightarrow & \neg\varphi \vee \neg\psi & \vec{\mathcal{Q}}x(\forall y \varphi \vee \psi) & \Rightarrow & \vec{\mathcal{Q}}x \forall z(\varphi(y/z) \vee \psi) \end{array}$$

Viimeisestä säännöstä tarvitaan versiot, joissa disjunktit ovat päinvastaisessa järjestyksessä, joissa $\forall$:in tilalla $\exists$, ja jossa disjunktion sijasta konjunktio (7 sääntöä lisää).

Esimerkki

$\neg\forall x(P(x) \to \exists z \; R(z,x)) \vee \exists x \; Q(x)$

$\neg\forall x(\neg P(x) \vee \exists z \; R(z,x)) \vee \exists x \; Q(x)$

$\exists x \neg(\neg P(x) \vee \exists z \; R(z,x)) \vee \exists x \; Q(x)$

$\exists x(\neg\neg P(x) \wedge \neg\exists z \; R(z,x)) \vee \exists x \; Q(x)$

$\exists x(P(x) \wedge \forall z \neg R(z,x)) \vee \exists x \; Q(x)$

$\exists x_1(\exists x(P(x) \wedge \forall z \neg R(z,x)) \vee Q(x_1))$

$\exists x_1 \exists x_2((P(x_2) \wedge \forall z \neg R(z,x_2)) \vee Q(x_1))$

$\exists x_1 \exists x_2 \forall z_1((P(x_2) \wedge \neg R(z_1,x_2)) \vee Q(x_1))$

Konjunktiivinen normaalimuoto predikaattilogiikassa

Määritelmä. Predikaattilogiikan lause on konjunktiivisessa normaalimuodossa, kun se on prenex-normaalimuodossa, ja sen kvanttoreita sisältämätön osa on muotoa $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$, missä ϕ_i on muotoa $l_1 \vee \cdots \vee l_{m_i}$, missä $l_1, \ldots, l_{m_i}$ ovat literaaleja, eli atomikaavoja tai niiden negaatioita.

Esim.
$\forall x \exists y \forall z((\neg P(x,y) \vee Q(y,x)) \wedge R(z) \wedge (\neg R(x) \vee P(y,z) \vee Q(x,z)))$

Esimerkki jatkuu

Lause on muutettu prenex-normaalimuotoon, josta jatketaan konjunktiiviseen normaalimuotoon.

$\neg\forall x(P(x) \to \exists z\ R(z,x)) \vee \exists x\ Q(x)$

$\vdots$

$\exists x_1 \exists x_2 \forall z_1((P(x_2) \wedge \neg R(z_1,x_2)) \vee Q(x_1))$

$\exists x_1 \exists x_2 \forall z_1((P(x_2) \vee Q(x_1)) \wedge (\neg R(z_1,x_2) \vee Q(x_1)))$

Eksistenssikvanttorien eliminointi

- Summafunktiolla on vasen identiteetti: $\exists x \forall y(x + y = y)$

  Esitellään symboli tälle identiteettialkiolle: $\forall y(0 + y = y)$

- Jokaisella kokonaisluvulla on vastaluku: $\forall x \exists y(x + y = 0)$

  Esitellään vastalukufunktio $-x$: $\forall x(x + -x = 0)$

Skolemisointi

Olkoon $\vec{\mathcal{Q}}x\phi$ prenex-normaalimuodossa.

Sisältäköön $\vec{\mathcal{Q}}x$ kvanttorin $\exists x_i$, ja $\exists x_i$:tä edeltää universaalikvanttorit $\forall x_{n_1}, \forall x_{n_2}, \ldots, \forall x_{n_m}$.

Poista kvanttori $\exists x_i$, ja korvaa x_i:n jokainen esiintymä termillä $f(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_m})$, missä f on uusi funktiosymboli.

Jos $\exists x_i$:tä ei edellä ainutkaan universaalikvanttori, korvataan x_i uudella vakiolla c.

Esimerkkejä

$$
\begin{aligned}
\exists x\ P(x) &\Rightarrow P(c) \\
\exists x \forall y\ P(x,y) &\Rightarrow \forall y\ P(c,y) \\
\forall x \exists y\ P(x,y) &\Rightarrow \forall x\ P(x,f(x)) \\
\forall x \exists y \forall z \exists w\ P(w,z,y,x) &\Rightarrow \forall x \forall z\ P(g(x,z),z,f(x),x) \\
\exists x \exists y \forall z\ P(x,y,z) &\Rightarrow \forall z\ P(c_1,c_2,z) \\
\forall x \exists y \exists z\ P(x,y,z) &\Rightarrow \forall x\ P(x,f_1(x),f_2(x))
\end{aligned}
$$

Skolemisoinnin ominaisuudet

Väite. Prenex-normaalimuodossa oleva lause φ on toteutuva jos ja vain jos sen skolemisoitu muoto φ' on toteutuva.

Huom. Prenex-normaalimuodossa olevan lauseen φ skolemisoitu muoto φ' **ei aina ole** loogisesti ekvivalentti φ:n kanssa.

Esimerkki. $\{P(c)\} \models \exists x\ P(x)$ mutta $\{\exists x\ P(x)\} \not\models P(c)$.

Predikaattilogiikan klausuulimuoto

Lause prenex-normaalimuotoon $\Rightarrow$ skolemisoidaan $\Rightarrow$ konjunktiiviseen normaalimuotoon.

$$\begin{aligned} \forall x \exists y (P(x,y) \to Q(x,y)) &\Rightarrow \forall x (P(x,f(x)) \to Q(x,f(x))) \\ &\Rightarrow \forall x (\neg P(x,f(x)) \vee Q(x,f(x))) \end{aligned}$$

Klausuuleina

$$\{\{\neg P(x,f(x)), Q(x,f(x))\}\}.$$

Herbrand-struktuurit

Kielen $\mathcal{L}$ muuttujattomien termien joukko on kielen $\mathcal{L}$ *Herbrand-universumi.*

Herbrand-struktuuri kielelle $\mathcal{L}$ on sellainen struktuuri $\mathcal{H}$, jossa

- domain on $\mathcal{L}$:n Herbrand-universumi, ja
- funktion f tulkinta $f^{\mathcal{H}}$ on funktio joka kuvaa universumin alkiot $t_1, \ldots, t_n$ termiksi (universumin alkioksi) $f(t_1, \ldots, t_n)$, ja
- vakion c tulkinta $c^{\mathcal{H}}$ on c itse.

Esimerkki. Kielessä on vakio c ja funktiosymboli $f(\ldots,\ldots)$.

Herbrand-universumi on
$c, f(c,c), f(f(c,c),c), f(c,f(c,c)), f(f(c,c),f(c,c)), \ldots$.

Esimerkki

$S = \{\{P(a)\}, \{\neg Q(x), P(x)\}, \{\neg Q(x), R(x,f(x))\}\}$,
predikaattikalkyylin lauseena
$\forall x (P(a) \wedge (\neg Q(x) \vee P(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee R(x,f(x))))$.

- S:n Herbrand-universumi on $H = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$.
- Eräs Herbrand-struktuuri on $\mathcal{H}$, jonka domain on H ja

$$\begin{aligned} a^{\mathcal{H}} &= a \\ f^{\mathcal{H}} &= \text{funktio, joka kuvaa kunkin termin } t \text{ termille } f(t) \\ P^{\mathcal{H}} &= \{a, f(a), f(f(f(a)))\} \\ Q^{\mathcal{H}} &= \{f(a)\} \\ R^{\mathcal{H}} &= \{\langle a, f(a)\rangle, \langle f(a), f(f(a))\rangle\}. \end{aligned}$$

- Herbrand-kanta B koostuu *atomisista lauseista*, jotka voidaan konstruoida käyttäen kielen $\mathcal{L}$ predikaattisymboleja ja Herbrand-universumin U muuttujattomia termejä:

$$B = \{P(a), Q(a), R(a,a), P(f(a)), Q(f(a)), R(a,f(a)), \ldots\}.$$

- Herbrand-struktuuri voidaan antaa literaalijoukkona

$$\mathcal{H} = \{P(a), \neg Q(a), \neg R(a,a), P(f(a)), Q(f(a)), R(a,f(a)), \neg R(f(a),a)), \neg R(f(a),f(a)), \ldots\},$$

joka määrittelee, mitkä atomiset lauseet ovat tosia/epätosia $\mathcal{H}$:ssa tai vaihtoehtoisesti Herbrand-kannan B osajoukkona

$$\mathcal{H} = \{P(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(a,f(a)), \ldots\},$$

joka määrittelee, mitkä atomiset lauseet ovat tosia $\mathcal{H}$:ssa.

Herbrandin teoreema

Väite.[Kirjassa T10.4 ja T10.6] Olkoon S joukko klausuuleita.

- S on toteutumaton jos ja vain jos sen kaikkien klausuulien muuttujattomien instanssien joukko S' on toteutumaton.
- S on toteutumaton jos ja vain jos on olemassa äärellinen toteutumaton joukko S' joukon S klausuulien muuttujattomia instansseja.

Instantioidessa klausuulien muuttujia käytetään Herbrand-universumin alkioita.

Unifikaatio

Määritelmä. Äärelliset joukot $\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_n/t_n\}$, missä x_i ovat muuttujia (x_i on eri muuttuja kuin x_j, jos $i \neq j$) ja termi t_i ei ole x_i, ovat *substituutioita*.

Jos t_i:t ovat muuttujattomia, substituutio on *muuttujaton*.

Jos t_i:t ovat muuttujia, substituutio on *nimeämissubstituutio*.

Määritelmä. Olkoon E termi, literaali tms. ja $\theta = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ substituutio. $E\theta$ on kuten E, paitsi että kukin x_i:n esiintymä E:ssä on korvattu termillä t_i.

Jos $E\theta$:ssa ei esiinny muuttujia, $E\theta$ on E:n muuttujaton instanssi.

Esimerkki. Olkoon $E = P(x,y,z,v,w)$ ja $\theta = \{x/y, y/x, z/x, v/f(x), w/g(f(y),c)\}$. Nyt $E\theta$ on

$$P(y,x,x,f(x),g(f(y),c))$$

Määritelmä. Olkoot $\theta = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ ja $\lambda = \{y_1/u_1, \ldots, y_m/u_m\}$. Substituutioiden θ ja λ *kompositio* $\theta\lambda$ (tai $\theta \circ \lambda$) on joukko

$$\{x_1/t_1\lambda, \ldots, x_n/t_n\lambda, y_1/u_1, \ldots, y_m/u_m\}$$

josta on poistettu alkiot $x_i/t_i\lambda$ joille $t_i\lambda = x_i$ ja alkiot y_i/u_i joille $y_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Ajatus: $E(\theta\lambda) = (E\theta)\lambda$

Esimerkki. Olkoon

$$\begin{aligned}\theta &= \{x_1/t_1, x_2/t_2\} = \{x/f(y), y/z\}\\ \lambda &= \{y_1/u_1, y_2/u_2, y_3/u_3\} = \{x/a, y/b, z/y\}.\end{aligned}$$

Tällöin $\{x_1/t_1\lambda, x_2/t_2\lambda, y_1/u_1, y_2/u_2, y_3/u_3\} =$
$\{x/f(b), y/y, x/a, y/b, z/y\}$. Koska $t_2\lambda = x_2$ ja $y_1, y_2 \in \{x_1, x_2, x_3\}$, tulee yo. joukosta poistaa vastaavat elementit. Substituutio $\theta\lambda$ on siis

$$\{x_1/t_1\lambda, y_3/u_3\} = \{x/f(b), z/y\}.$$

Unifioijat

Olkoon $S = \{E_1, \ldots, E_n\}$ joukko termejä (tai literaaleja tms.). Substituutio θ on S:n *unifioija*, jos $E_1\theta = E_2\theta = \cdots = E_n\theta$.

Jos S:lle on unifioija, on S *unifioituva*.

Esimerkki.

joukko	unifioija
$\{P(x, f(a)), P(y, z)\}$	$\{y/x, z/f(a)\}$ tai $\{x/y, z/f(a)\}$
$\{P(x, f(x)), P(f(a), y)\}$	$\{x/f(a), y/f(f(a))\}$
$\{P(a), P(f(x))\}$	ei unifioijaa
$\{P(x), P(f(x))\}$	ei unifioijaa (termit aina äärellisiä)

Joukon $\{E_1, \ldots, E_n\}$ unifioija σ on *yleisin unifioija*, jos jokaiselle ko. joukon unifioijalle θ on olemassa substituutio λ siten että $\theta = \sigma\lambda$.

Esimerkki. Joukon $L = \{P(x, f(y)), P(a, z)\}$ unifioijia ovat mm.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \{x/a, z/f(b), y/b\}\\ \lambda_2 &= \{x/a, z/f(y)\}\end{aligned}$$

λ_2 on L:n yleisin unifioija:

$$\lambda_1 = \lambda_2\{y/b\}$$

Väite. Olkoot θ ja σ joukon S yleisimpiä unifioijia. Tällöin on olemassa nimeämissubstituutio λ siten että $S\theta\lambda = S\sigma$.

Unifikaatioalgoritmi

Erojoukko $D(S)$ ei-tyhjälle joukolle atomikaavoja S on

1. ensimmäiset eroavat termit, tai
2. jos predikaattisymbolit eivät samoja, atomikaavat itse.

Esimerkki. Joukon $S = \{P(x), Q(y)\}$ erojoukko $D(S) = S$.

Joukon $S = \{P(x, y), P(x, g(z))\}$ erojoukko $D(S) = \{y, g(z)\}$.

Unifikaatioalgoritmi:

1. $k := 0$, $S_k := S$ ja $\sigma_k := \epsilon$
2. Jos S_k on yksialkioinen joukko, lopeta algoritmin suoritus: $\sigma_0\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_k$ on S:n yleisin unifioija.
   Muussa tapauksessa etsi S_k:n erojoukko $D(S_k)$.
3. Jos $D(S_k)$:ssa on alkiot v_k ja t_k siten että v_k on muuttuja, joka ei esiinny t_k:ssa, mene kohtaan 4. Muussa tapauksessa lopeta algoritmin suoritus: S ei ole unifioituva.
4. $\sigma_{k+1} := \{v_k/t_k\}$ ja $S_{k+1} := S_k\{v_k/t_k\}$.
5. $k := k + 1$ ja mene kohtaan 2.

Väite. Jos S on äärellinen ei-tyhjä unifioituva joukko atomikaavoja, niin unifikaatioalgoritmin laskenta päättyy askeleen 2 kohdalla ja σ_k on S:n yleisin unifioija.

Esimerkki. Lasketaan unifikaatioalgoritmilla joukon $S = \{P(x, f(x)), P(g(a), z)\}$ yleisin unifioija.

1. $S_0 = \{P(x, f(x)), P(g(a), z)\}, \sigma_0 = \epsilon$
2. $D(S_0) = \{x, g(a)\}$
3. alkio $v_0 = x$ ja $t_0 = g(a)$
4. $\sigma_1 = \{x/g(a)\}, S_1 = \{P(g(a), f(g(a))), P(g(a), z)\}$
2. $D(S_1) = \{f(g(a)), z\}$
3. alkio $v_1 = z$ ja $t_1 = f(g(a))$
4. $\sigma_2 = \{z/f(g(a))\}$, $S_2 = \{P(g(a), f(g(a))), P(g(a), f(g(a))) = \{P(g(a), f(g(a)))\}$
2. S_2 on yksialkioinen, joten S on unifioituva.

Yleisin unifioija on $\sigma = \sigma_0\sigma_1\sigma_2 = (\epsilon\{x/g(a)\})\{z/f(g(a))\} = \{x/g(a), z/f(g(a))\}$ ja $S\sigma = \{P(g(a), f(g(a)))\}$.