Semanttiset taulut predikaattilogiikalle

$T(\forall x)\varphi(x)$ $\vert$ $T\varphi(t)$ t muuttujaton termi	$F(\exists x)\varphi(x)$ $\vert$ $F\varphi(t)$ t muuttujaton termi
$F(\forall x)\varphi(x)$ $\vert$ $F\varphi(c)$ c uusi vakio	$T(\exists x)\varphi(x)$ $\vert$ $T\varphi(c)$ c uusi vakio

Ohjeita semanttisten taulujen laadintaan

- Lauseen rakenne määrää edelleen, mitä taulusääntöä tulee käyttää (uloin konnektiivi).

  Solmujen hajoittamisjärjestyksellä voi usein vaikuttaa taulun kokoon (haarautumista kannattaa välttää).

- Muotoa $T(\exists x)\varphi(x)$ tai $F(\forall x)\varphi(x)$ olevat solmut tulee hajoittaa *kertaalleen* jollekin *uudelle vakiolle* c.

- Muotoa $T(\forall x)\varphi(x)$ tai $F(\exists x)\varphi(x)$ olevat solmut tulee (tarvittaessa) hajoittaa kaikille *muuttujattomille termeille* t.

  Valitsemalla termit sopivasti voidaan usein nopeuttaa taulun sulkeutumista. Valinta tulee suorittaa hajoittamishetkellä (eikä myöhemmin).

Määritelmä. Taulu τ on lauseen φ *todistus*, jos τ on ristiriitainen ja sen juuressa on $F\varphi$.
Jos φ:lla on todistus, on φ *teoreema* (merkitään $\vdash \varphi$).

Määritelmä. Lause φ *on johdettavissa* äärellisestä lausejoukosta $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, jos seuraava taulu on laajennettavissa ristiriitaiseksi (merkitään $\Sigma \vdash \varphi$):

$$\begin{array}{c} F\varphi \\ | \\ T\alpha_1 \\ | \\ \vdots \\ | \\ T\alpha_n \end{array}$$

Esimerkkejä

$\vdash \exists x \forall y \exists z \forall w \; P(x,y,z,w)$?

$$\begin{array}{c} F\exists x \forall y \exists z \forall w \; P(x,y,z,w) \\ | \\ F\forall y \exists z \forall w \; P(a,y,z,w) \\ | \\ F\exists z \forall w \; P(a,b,z,w) \\ | \\ F\forall w \; P(a,b,a,w) \\ | \\ F P(a,b,a,c) \end{array}$$

$\{(\exists x)(P(x) \land Q(x))\} \vdash P(a)$?

$$\begin{array}{c} FP(a) \\ | \\ T(\exists x)(P(x) \land Q(x)) \\ | \\ T(P(b) \land Q(b)) \\ | \\ TP(b) \\ | \\ TQ(b) \end{array}$$

$\{P(a), (\forall x)(P(x) \to Q(x))\} \vdash Q(a)$?

$$\begin{array}{ccc} & FQ(a) & \\ & | & \\ & T(\forall x)(P(x) \to Q(x)) & \\ & | & \\ & TP(a) & \\ & | & \\ & T(P(a) \to Q(a)) & \\ / & & \backslash \\ FP(a) & & TQ(a) \\ \otimes & & \otimes \end{array}$$

Muita luennolla käsiteltyjä esimerkkejä (kommentti kertoo, mitä taulujen piirrettä on haluttu tuoda esille):

1. $\{\forall x P(x)\} \vdash \exists x P(x)$

   Valitaan termiksi esim. vakio a, vaikkei tämä esiinny lauseissa.

2. $\{\forall x P(x)\} \vdash P(a) \land P(b)$

   Sama solmu ($T\forall x P(x)$) hajoitetaan useaan kertaan.

3. $\{\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \land P(y,z) \to P(x,z)), P(a,b), P(b,c)\} \vdash P(a,c)$

   Oleellista x:n, y:n ja z:n korvaaminen oikeilla termeillä.

4. $\{\forall P(x), \forall x(P(x) \to Q(x)), P(a)\} \vdash \forall x P(x)$

   Oleellista hajoitusjärjestys; ensin uusi vakio käyttöön.

Systemaattinen taulu

Lauselogiikka on *ratkeava*: on olemassa proseduureja, jotka

1. vastaavat KYLLÄ kun lause on pätevä
2. vastaavat EI kun lause ei ole pätevä

(Esim. totuustaulukot tai semanttinen taulu)

Predikaattilogiikka ei ole ratkeava. Se on *puoliratkeava*:

1. On olemassa proseduureja, jotka vastaavat KYLLÄ kun syöte on pätevä lause
2. Mikään tällainen proseduuri ei voi aina vastata EI kun syöte ei ole pätevä lause (proseduuri ei tällöin anna vastausta ollenkaan)

Rakentamalla semanttiset taulut tietyllä tavalla systemaattisesti, voidaan taata että taulu saadaan aina ristiriitaiseksi jos sen juuressa on $F\varphi$ ja φ on pätevä.

Esimerkki. Luonnollisten lukujen $>$-relaatio.
$\forall x\ P(s(x), x)$
$\forall x \forall y\ P(x, y) \rightarrow P(s(x), y)$

Tarvitaan lista kielen kaikista muuttujattomista termeistä

$$0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \ldots$$

Jos taulussa esiintyy muotoa $T(\exists x)\varphi$ tai $F(\forall x)\varphi$ olevia solmuja, tarvitaan myös ääretön määrä uusia vakioita:

$$c_0, c_1, c_2, \ldots$$

Hilbert-tyyppinen aksiomatisointi

Aksiomat:

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
3. $(\neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
4. $(\forall x)\alpha(x) \rightarrow \alpha(t)$ kaikille termeille t (sijoitettavissa α:aan)
5. $(\forall x)(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\forall x)\beta)$ jos x ei esiinny α:ssa vapaana

Päättelysäännöt:

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta} \quad \text{(MP)} \qquad\qquad \frac{\alpha}{\forall x \alpha} \quad \text{(Yleistys)}$$

Määritelmä. Olkoon Σ joukko lauseita.

Todistus Σ:sta on jono lauseita $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ siten että kaikille $i \in \{1, \ldots, n\}$

- $\alpha_i \in \Sigma$,
- α_i on aksiooma, tai
- α_i on saatu päättelysäännöllä aikaisemmista lauseista.

Lause α on *johdettavissa* Σ:sta, jos on olemassa todistus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Σ:sta ja $\alpha = \alpha_n$. $(\Sigma \vdash \alpha)$

Lause α on teoreema (todistuva) jos se on johdettavissa tyhjästä lausejoukosta $\Sigma = \emptyset$. $(\vdash \alpha)$

Esimerkki

1.	$P(x) \rightarrow ((P(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow P(x))$	Ax1
2.	$(P(x) \rightarrow ((P(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow P(x)))$ $\rightarrow ((P(x) \rightarrow (P(x) \rightarrow P(x))) \rightarrow (P(x) \rightarrow P(x)))$	Ax2
3.	$(P(x) \rightarrow (P(x) \rightarrow P(x))) \rightarrow (P(x) \rightarrow P(x))$	MP,1,2
4.	$P(x) \rightarrow (P(x) \rightarrow P(x))$	Ax1
5.	$P(x) \rightarrow P(x)$	MP,3,4
6.	$\forall x(P(x) \rightarrow P(x))$	Yleistys,5

Prolog-ohjelmat predikaattilogiikassa

$$
\begin{array}{rcl}
p(X) & \Rightarrow & \forall x\ P(x) \\
r(X,Y)\ \text{:-}\ q(X) & \Rightarrow & \forall x \forall y (Q(x) \to R(x,y)) \\
\text{:-}\ q(X) & \Rightarrow & \forall x\ (Q(x) \to \bot)\ \text{eli}\ \forall x\ \neg Q(x)\ \text{eli}\ \neg\exists x\ Q(x)
\end{array}
$$

Listanotaatio:

$$
\begin{array}{rcl}
[] & \Rightarrow & \mathrm{e} \\
[X|Y] & \Rightarrow & \mathrm{c}(X,Y) \\
[X|[Y|Z]] & \Rightarrow & \mathrm{c}(X,\mathrm{c}(Y,Z)) \\
[X,Y,Z] & \Rightarrow & \mathrm{c}(X,\mathrm{c}(Y,\mathrm{c}(Z,e)))
\end{array}
$$

Esimerkki

$T \forall x \forall y\ \mathrm{Me}(x, \mathrm{c}(x,y))$

$T \forall x \forall y \forall z (\mathrm{Me}(x,z) \to$
$\mathrm{Me}(x, \mathrm{c}(y,z)))$

$F \mathrm{Me}(a, \mathrm{c}(b, \mathrm{c}(a,e)))$

$T \mathrm{Me}(a, \mathrm{c}(a,e)) \to$
$\mathrm{Me}(a, \mathrm{c}(b, \mathrm{c}(a,e)))$

$F \mathrm{Me}(a, \mathrm{c}(a,e))$ | $T \mathrm{Me}(a, \mathrm{c}(b, \mathrm{c}(a,e)))$

$T \mathrm{Me}(a, \mathrm{c}(a,e))$ | $\otimes$

$\otimes$

Prologin negaatio

```
nuori(a).
vanha(X) :- not(nuori(X)).
```

Prolog vastaa kyselyyn vanha(b) myönteisesti.

$T \mathrm{nuori}(a)$

$T \forall x (\neg \mathrm{nuori}(x) \to \mathrm{vanha}(x))$

$F \mathrm{vanha}(b)$

$T (\neg \mathrm{nuori}(b) \to \mathrm{vanha}(b))$

$F \neg \mathrm{nuori}(b)$ | $T \mathrm{vanha}(b)$

$T \mathrm{nuori}(b)$ | $\otimes$