Kaikki, jokin

Lauselogiikka useisiin tarkoituksiin liian yksinkertainen:

A = "a on viallinen", B = "b on viallinen", C = "c on viallinen"

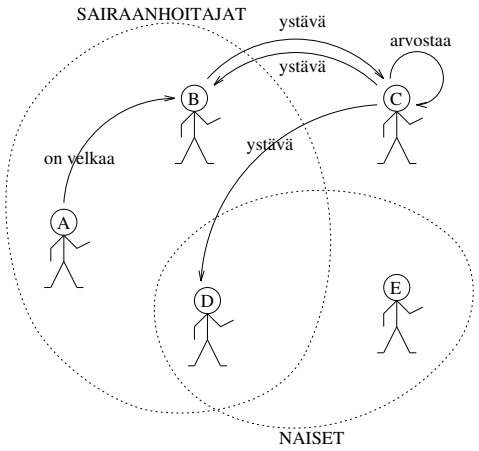
"kaikki ovat viallisia" = $A \wedge B \wedge C$

"jokin on viallinen" = $A \vee B \vee C$

C_d = "c on isompi kuin d", D_e = "d on isompi kuin e", ...

"jos x on isompi kuin y ja y on isompi kuin z, niin x on isompi kuin z":

$(C_d \wedge D_e \rightarrow C_e) \wedge (C_e \wedge E_d \rightarrow C_d) \wedge (D_e \wedge E_c \rightarrow D_c) \wedge (D_e \wedge E_d \rightarrow D_d) \wedge \cdots$



Predikaattilogiikan syntaksi

Kieli $\mathcal{L}$ koostuu seuraavista symboleista:

$x, y, z, v, x_0, x_1, \ldots, y_0, \ldots$	muuttujat
$c_1, c_2, \ldots$	vakiot
$f, g, h, f_0, f_1, \ldots, g_0, \ldots$	funktiosymbolit
$P, Q, R, P_0, P_1, \ldots, Q_0, \ldots$	predikaattisymbolit
$=$	yhtäsuuruuspredikaatti
$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$	lauselogiikan konnektiivit
$\exists$	eksistenssikvanttori: jollekin...
$\forall$	universaalikvanttori: kaikille...
$(,)$	sulut ja pilkku

Määritelmä.

1. Muuttujat ovat *termejä*.
2. Vakiot ovat *termejä*.
3. Jos f on n-paikkainen funktiosymboli ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat termejä, niin $f(t_1, \ldots, t_n)$ on *termi*.
4. Muita termejä ei ole.

Esim: x, c, $f(x)$, $f(f(f(f(x)))))$, $g(f(x), g(f(x), g(x, c)))$.

Määritelmä. Termi, jossa ei esiinny muuttujia, on *muuttujaton term* (ground term).

Määritelmä. Olkoon P n-paikkainen predikaattisymboli ja olkoot $t_1, \ldots, t_n$ termejä. Tällöin seuraavat ovat *atomikaavoja*.

- $t_1 = t_2$
- $P(t_1, \ldots, t_n)$

Muita atomikaavoja ei ole.

Esimerkki. Atomikaavoja:

$$P(x_1) \qquad Q(c_1, x_1, y_1) \qquad x_1 = x_2$$
$$g(x_1, x_2) = f(f(c_1))$$
$$Q(x_1, c_1, f(x), h(f(x_1), c_1, x_1), x_2, x_2, x_3)$$

Määritelmä.

1. atomikaavat ovat *kaavoja*
2. jos ϕ ja ψ ovat kaavoja ja x on muuttuja, niin myös

   $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \to \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$, $((\forall x)\phi)$, $((\exists x)\phi)$

   ovat *kaavoja*.
3. muita kaavoja ei ole.

Predikaattilogiikan kaavoja: $P(c)$
$((\forall x)(P(x) \to Q(x)))$
$((\forall x)(P(x) \vee ((\exists y)Q(x, y))))$
$((\exists x)((\forall y)((\forall z)P(x, y, z))))$

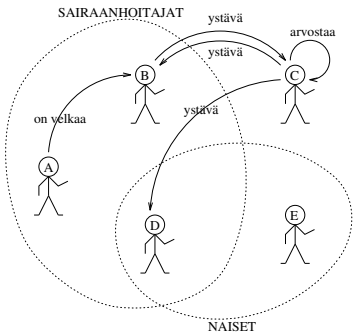
Olkoon t tuoli, h hattu, s sateenvarjo, $P(x, y)$: "x on y:n päällä".

$\neg P(s, t)$
: "sateenvarjo ei ole tuolin päällä".

$\exists x\ P(x, h)$
: "on olemassa sellainen x, että x on hatun päällä", eli "hatun päällä on jotakin".

$\exists x \forall y\ \neg P(y, x)$
: "on olemassa sellainen x, että kaikille y, y ei ole x:n päällä", eli "jonkin päällä ei ole mitään".

$\forall x(P(x, h) \to P(x, t))$
: "kaikille x: jos x on hatun päällä, niin x on tuolin päällä", eli "kaikki hatun päällä olevat ovat tuolin päällä".



$N(e) \to A(c, c)$ $\qquad \exists x \exists y(Y(x, y) \wedge Y(y, x))$
$\exists x \exists y(S(x) \wedge S(y) \wedge V(x, y))$ $\qquad (\exists x(A(x, x))) \wedge (\exists x(S(x) \wedge N(x)))$
$\neg \forall x(S(x) \to N(x))$ $\qquad \forall x(Y(x, c) \to V(a, x))$

Määritelmä. Olkoot $\exists x\psi$ ja $\forall x\phi$ predikaattilogiikan kaavoja. Alikaava ψ on muuttujan x vaikutusalue (scope) kaavassa $\exists x\psi$. Alikaava ϕ on muuttujan x vaikutusalue kaavassa $\forall x\phi$.

Esimerkki.

$$\forall x\overbrace{(P(x) \rightarrow \exists y \underbrace{Q(x,y)}_{\text{y:n vaikutusalue}})}^{\text{x:n vaikutusalue}}$$

$$\exists x\overbrace{(Q(x) \rightarrow \forall y \underbrace{Q(y,z)}_{\text{y:n vaikutusalue}})}^{\text{x:n vaikutusalue}}$$

Määritelmä. Muuttujan x esiintymä kaavassa ψ on *sidottu*, jos se sijaitsee $\forall x$:n (tai $\exists x$:n) vaikutusalueessa. Kvanttorisymbolia seuraava muuttujaesiintymä on sidottu.

Jos muuttujan x esiintymä ei ole sidottu, niin x:n esiintymä on *vapaa*.

Muuttuja x *esiintyy vapaana* ϕ:ssä, jos sillä on vapaa esiintymä ϕ:ssä.

Kaava ϕ on *lause*, jos siinä ei ole vapaita muuttujaesiintymiä.

Esimerkki.

$$\forall\overbrace{x}^{S}(P(\overbrace{x}^{S},\overbrace{y}^{V},\overbrace{z}^{V}) \vee \exists\overbrace{y}^{S}(Q(\overbrace{y}^{S}) \rightarrow R(\overbrace{x}^{S},\overbrace{z}^{V})))$$

Predikaattilogiikan semantiikka

Määritelmä. *Struktuuri* (rakenne) $\mathcal{A}$ kielelle $\mathcal{L}$ on $\langle A, s\rangle$, missä

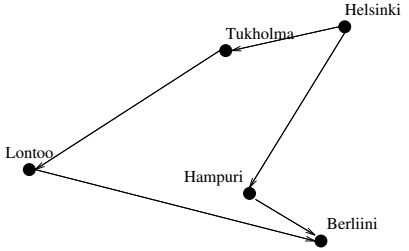
- A on domain (alue, universumi), jokin ei-tyhjä joukko
- s liittää jokaiseen

  n-paikkaiseen predikaattisymboliin P relaation $P^{\mathcal{A}} \subseteq A \times \cdots \times A = A^n$,

  vakioon c domainin alkion $c^{\mathcal{A}} \in A$,

  n-paikkaiseen funktiosymboliin f funktion $f^{\mathcal{A}}$ joukolta A^n joukolle A.

Esimerkki



$$\begin{array}{rclrcl} A & = & \{he, tu, ha, be, lo\} & \text{Helsinki}^{\mathcal{A}} & = & he \\ \text{Tukholma}^{\mathcal{A}} & = & tu & \text{Hampuri}^{\mathcal{A}} & = & ha \\ \text{Berliini}^{\mathcal{A}} & = & be & \text{Lontoo}^{\mathcal{A}} & = & lo \\ \text{lento}^{\mathcal{A}} & = & \{\langle he, tu\rangle, \langle tu, lo\rangle, \langle lo, be\rangle, \langle he, ha\rangle, \langle ha, be\rangle\} & & & \end{array}$$

Muuttujattomien termien tulkinta

Määritelmä.

- Vakio c *nimeää* domainin alkion $c^{\mathcal{A}}$.
- Jos termit $t_1, \ldots, t_n$ nimeävät domainin alkion $t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}}$, niin $f(t_1, \ldots, t_n)$ *nimeää* domainin alkion $f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}})$.

Näin voimme viitata kielen $\mathcal{L}$ muuttujattomilla termeillä domainin A alkioihin (kunhan symbolien tulkinnat on annettu).

Kuulukoon kieleen $\mathcal{L}$ symbolit P, c, d, f, g. Olkoon struktuurin $\mathcal{A}$ domain luonnolliset luvut $0, 1, 2, \ldots$ ja

$$
\begin{aligned}
P^{\mathcal{A}} &= \emptyset \text{ (tyhjä relaatio)} \\
c^{\mathcal{A}} &= 1 \\
d^{\mathcal{A}} &= 7 \\
f^{\mathcal{A}} &= \text{ seuraajafunktio, eli } f^{\mathcal{A}}(n) = n + 1 \\
g^{\mathcal{A}} &= \text{ summafunktio, eli } g^{\mathcal{A}}(n, m) = n + m
\end{aligned}
$$

c	nimeää alkion	1
d	nimeää alkion	7
$f(c)$	nimeää alkion	2
$f(f(c))$	nimeää alkion	3
$g(f(c), d)$	nimeää alkion	9

1. Konstruoidaan struktuuri $\mathcal{A}_1$ kielelle, jossa on 2-paikkainen predikaattisymboli O ja vakiosymbolit c, d, e. Olkoon $A = \{1, 2\}$.

$$
\begin{aligned}
O^{\mathcal{A}_1} &= \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\} \\
c^{\mathcal{A}_1} &= 1 \\
d^{\mathcal{A}_1} &= 2 \\
e^{\mathcal{A}_1} &= 1
\end{aligned}
$$

2. Konstruoidaan struktuuri $\mathcal{A}_2$ kielelle, jossa on 1- ja 2-paikkaiset predikaattisymbolit P_1, P_2, vakio c ja funktiosymboli f. Olkoon A luonnollisten lukujen joukko.

$$
\begin{aligned}
P_1^{\mathcal{A}_2} &= \{n | n \text{ on parillinen luonnollinen luku } \} \\
P_2^{\mathcal{A}_2} &= \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \ldots\} \\
f^{\mathcal{A}_2} &= \text{ funktio } f^{\mathcal{A}_2}(n) = 3 \cdot n + 7
\end{aligned}
$$

Predikaattilogiikan totuusmääritelmä

Olkoon $\mathcal{A}$ struktuuri kielelle $\mathcal{L}$ siten, että jokainen A:n alkio on jonkin $\mathcal{L}$:n muuttujattoman termin nimeämä.

1. $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$ joss $t_1^{\mathcal{A}}$ ja $t_2^{\mathcal{A}}$ ovat sama A:n alkio.
2. $\mathcal{A} \models P(t_1, \ldots, t_n)$ joss $\langle t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}}\rangle \in P^{\mathcal{A}}$
3. $\mathcal{A} \models \neg\psi$ joss $\mathcal{A} \not\models \psi$
4. $\mathcal{A} \models \psi \wedge \phi$ joss $\mathcal{A} \models \psi$ ja $\mathcal{A} \models \phi$
5. $\mathcal{A} \models \psi \vee \phi$ joss $\mathcal{A} \models \psi$ tai $\mathcal{A} \models \psi$
6. $\mathcal{A} \models \psi \rightarrow \phi$ joss $\mathcal{A} \not\models \psi$ tai $\mathcal{A} \models \phi$
7. $\mathcal{A} \models \psi \leftrightarrow \phi$ joss joko $\mathcal{A} \models \psi$ ja $\mathcal{A} \models \phi$ tai $\mathcal{A} \not\models \psi$ ja $\mathcal{A} \not\models \phi$

8. $\mathcal{A} \models \exists x \psi(x)$ joss $\mathcal{A} \models \psi(t)$ *jollekin* muuttujattomalle termille t
9. $\mathcal{A} \models \forall x \psi(x)$ joss $\mathcal{A} \models \psi(t)$ *kaikille* muuttujattomille termeille t

- Kohdissa 8 ja 9 oletetaan, että jokaisella A:n alkiolla a on nimi $\mathcal{A}$:ssa (muuttujaton termi t siten, että $t^{\mathcal{A}} = a$).
- Tarvittaessa kieli $\mathcal{L}$ ja struktuuri $\mathcal{A}$ voidaan täydentää (esim. lisäämällä vakioita) siten, että tämä vaatimus toteutuu.

Esimerkki. Olkoon kielessä $\mathcal{L}$ symbolit P, c, d. Olkoon $\mathcal{A}$:n domain $A = \{1, 2\}$ ja

$$\begin{aligned} P^{\mathcal{A}} &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\} \\ c^{\mathcal{A}} &= 1 \qquad d^{\mathcal{A}} = 2 \end{aligned}$$

Lauseen $P(c, d)$ totuus $\mathcal{A}$:ssa:

$c^{\mathcal{A}} = 1$, $d^{\mathcal{A}} = 2$ ja $\langle 1, 2\rangle \in P^{\mathcal{A}}$, joten $\mathcal{A} \models P(c, d)$.

Lauseen $P(c, d) \vee P(d, c)$ totuus $\mathcal{A}$:ssa.

$\langle 2, 1\rangle \notin P^{\mathcal{A}}$, joten $\mathcal{A} \not\models P(d, c)$.

Disjunktion totuusmääritelmällä $\mathcal{A} \models P(c, d) \vee P(d, c)$.

Lauseen $\forall x \exists y P(x, y)$ totuus $\mathcal{A}$:ssa.

Tutkitaan, onko $\mathcal{A} \models \exists y\ P(c, y)$.

Koska $\mathcal{A} \models P(c, d)$,
$\mathcal{A} \models \exists y\ P(c, y)$.

Tutkitaan, onko $\mathcal{A} \models \exists y\ P(d, y)$.

Koska $\mathcal{A} \models P(d, d)$,
$\mathcal{A} \models \exists y\ P(d, y)$.

Koska kaikille muuttujattomille termeille t, $\mathcal{A} \models \exists y\ P(t, y)$, niin $\mathcal{A} \models \forall x \exists y\ P(x, y)$.

Määritelmä. Kielen $\mathcal{L}$ lause ψ on *pätevä* joss ψ on tosi jokaisessa $\mathcal{L}$:n struktuurissa. Tämä merkitään $\models \psi$.

Esimerkki. $\models (\forall x\ P(x)) \vee \neg(\forall x\ P(x))$
$\models (\forall x\ P(x)) \leftrightarrow (\neg\exists x\ \neg P(x))$

Määritelmä. Kielen $\mathcal{L}$ lause ψ on *toteutuva* joss ψ on tosi ainakin yhdessä $\mathcal{L}$:n struktuurissa.

Esimerkki. $\exists x \forall y P(x, y)$ on toteutuva.
Olkoon $\mathcal{A}$:n domain $A = \{1, 2\}$ ja $P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$.

Määritelmä. Olkoon Σ joukko lauseita kielessä $\mathcal{L}$ ja olkoon $\mathcal{A}$ kielen $\mathcal{L}$ struktuuri. $\mathcal{A}$ *on* Σ*:n malli* jos jokainen Σ:n lause on tosi $\mathcal{A}$:ssa. Merkintätapa: $\mathcal{A} \models \Sigma$.

Lausejoukko jolla on malli, on *toteutuva*. Jos lausejoukko ei ole toteutuva, se on *toteutumaton*.

Määritelmä. Kielen $\mathcal{L}$ lause ψ on $\mathcal{L}$:n lauseiden Σ *looginen seuraus* joss ψ on tosi jokaisessa Σ:n mallissa. Merkintätapa: $\Sigma \models \psi$.

Esimerkki

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \text{tentti(tiistai)} \\ \text{tentti(keskiviikko)} \\ \text{luento(keskiviikko)} \\ \forall x((\neg\text{tentti}(x) \wedge \neg\text{luento}(x)) \rightarrow \text{vapaa}(x)) \end{array} \right\}$$

Onko $\Sigma \models$ vapaa(perjantai)? Annetaan vastamalli $\mathcal{A}$, jolle $\mathcal{A} \models \Sigma$ ja $\mathcal{A} \not\models$ vapaa(perjantai)

$$\begin{array}{rclrcl} A & = & \{t,k,p\} & \text{tiistai}^{\mathcal{A}} & = & t \\ \text{keskiviikko}^{\mathcal{A}} & = & k & \text{perjantai}^{\mathcal{A}} & = & p \\ \text{tentti}^{\mathcal{A}} & = & \{t,k\} & \text{luento}^{\mathcal{A}} & = & \{k,p\} \\ \text{vapaa}^{\mathcal{A}} & = & \{\} & & & \end{array}$$