Lauseiden klausuulimuoto

- Lausemuuttujat A ja negatoidut lausemuuttujat $\neg A$ ovat *literaaleja*.
- Literaalin komplementti: $\overline{A} = \neg A$, $\overline{\neg A} = A$.
- Literaalien $l_1, \ldots, l_n$ disjunktio $l_1 \vee \cdots \vee l_n$ on *klausuuli*. Klausuulit kirjoitetaan usein muodossa $\{l_1, \ldots, l_n\}$.
- *Tyhjä klausuuli* $\Box$ on aina epätosi.
- Joukko klausuuleita S on tosi, jos kaikki sen alkiot ovat tosia. Tyhjä klausuulijoukko $\emptyset$ on aina tosi.

Klausuulijoukko $\{\{A, \neg B\}, \{\neg C, \neg A, D\}\}$ vastaa lausetta $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee D)$.

- *Totuusjakelu* $\mathcal{A}$ on joukko literaaleja siten ettei millekään lausemuuttujalle B sekä $B \in \mathcal{A}$ että $\neg B \in \mathcal{A}$.
- Totuusjakelu $\mathcal{A}$ on *täydellinen*, jos jokaiselle lausemuuttujalle B joko $B \in \mathcal{A}$ tai $\neg B \in \mathcal{A}$.

  Täydellinen totuusjakelu vastaa valuaatiota.
- $\mathcal{A}$ *toteuttaa* S:n ($\mathcal{A} \models S$) joss kaikille $C \in S$, $C \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

  (Vastaavasti: valuaatio $\mathcal{V}$ toteuttaa lauseen α jos $\mathcal{V}(\alpha) = T$).
- Klausuulijoukko S on *toteutuva* jos on totuusjakelu $\mathcal{A}$ siten että $\mathcal{A} \models S$. Muuten S on *toteutumaton*.

Esimerkkejä

Olkoon $\mathcal{A} = \{A, \neg B\}$.

Nyt

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\models \{\{A, C, E\}, \{\neg A, \neg B\}\} \\ \mathcal{A} &\models \emptyset \\ \mathcal{A} &\not\models \{\{A, B\}, \{C\}\} \end{aligned}$$

Klausuulijoukot $\{\{A, C, E\}, \{\neg A, \neg B\}\}$ ja $\emptyset$ ovat toteutuvia.

Mutta $\{\{A\}, \{\neg A\}\}$ ja $\{\Box\}$ eivät ole toteutuvia.

Resoluutiosääntö

Olkoot $C_1 = \{l, l_1, \ldots, l_n\}$ ja $C_2 = \{\overline{l}, l'_1, \ldots, l'_m\}$ klausuuleja.

Klausuuli $C = \{l_1, \ldots, l_n, l'_1, \ldots, l'_m\}$ on C_1:n ja C_2:n *resolventti*.

Resoluutiotodistukset

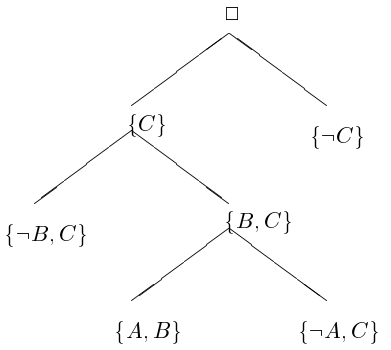
Klausuulin C *johto* klausuulijoukosta S on äärellinen jono klausuuleja $C_1, \ldots, C_n$, missä $C_n = C$ ja jokaiselle C_i joko $C_i \in S$ tai C_i on joidenkin aikaisempien klausuulien resolventti.

S:n *refutaatio* on tyhjän klausuulin $\square$ johto S:stä.

Esimerkkejä

$S = \{\{A, B\}, \{\neg A, C\}, \{\neg B, C\}, \{\neg C\}\}$

1.	$\{A, B\}$	S
2.	$\{\neg A, C\}$	S
3.	$\{\neg B, C\}$	S
4.	$\{\neg C\}$	S
5.	$\{B, C\}$	1, 2
6.	$\{C\}$	3, 5
7.	$\square$	4, 6



$S = \{\{A, B\}, \{\neg A, B\}, \{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg B\}\}$

1.	$\{A, B\}$	S
2.	$\{\neg A, B\}$	S
3.	$\{A, \neg B\}$	S
4.	$\{\neg A, \neg B\}$	S
5.	$\{B\}$	1, 2
6.	$\{\neg B\}$	3, 4
7.	$\square$	5, 6

Pätevyyden tutkiminen resoluutiolla

Väite. α on pätevä joss $\neg\alpha$ on toteutumaton ($\mathcal{V}(\neg\alpha) = F$ eli $\mathcal{V}(\alpha) = T$ kaikille valuaatioille $\mathcal{V}$).

Menettely:

$\neg\alpha$ $\Rightarrow$ konjunktiiviseen normaalimuotoon
$\Rightarrow$ klausuulijoukoksi S
$\Rightarrow$ suoritetaan S:n refutaatio
$\Rightarrow$ S toteutumaton
$\Rightarrow$ α pätevä

Onko $(A \to B) \wedge (\neg A \to C) \to (B \vee C)$ pätevä?

Negaation CNF on $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge \neg B \wedge \neg C$.

Klausuulijoukkona $\{\{\neg A, B\}, \{A, C\}, \{\neg B\}, \{\neg C\}\}$.

1. $\{\neg A, B\}$ S
2. $\{A, C\}$ S
3. $\{\neg B\}$ S
4. $\{\neg C\}$ S
5. $\{B, C\}$ 1, 2
6. $\{C\}$ 3, 5
7. $\square$ 4, 6

Loogisen seuraavuuden tutkiminen resoluutiolla

Väite. α on Σ:n looginen seuraus jos $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ on toteutumaton.

Menettely: $\Sigma, \neg\alpha$ $\Rightarrow$ konjunktiiviseen normaalimuotoon
$\Rightarrow$ klausuulijoukoksi S
$\Rightarrow$ suoritetaan S:n refutaatio
$\Rightarrow$ S toteutumaton
$\Rightarrow$ α on Σ:n looginen seuraus

Onko A lausejoukon $\{\neg A \to B, B \vee C \to \neg B\}$ looginen seuraus?

lause	CNF	klausuuleina
$\neg A$	$\neg A$	$\{\{\neg A\}\}$
$\neg A \to B$	$A \vee B$	$\{\{A, B\}\}$
$B \vee C \to \neg B$	$(\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg B)$	$\{\{\neg B, \neg C\}, \{\neg B\}\}$

Näiden unioni: $\{\{\neg A\}, \{A, B\}, \{\neg B, \neg C\}, \{\neg B\}\}$

1. $\{\neg A\}$ S
2. $\{A, B\}$ S
3. $\{\neg B, \neg C\}$ S
4. $\{\neg B\}$ S
5. $\{B\}$ 1, 2
6. $\square$ 4, 5

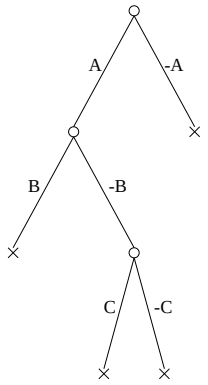
Resoluution virheettömyys ja täydellisyys

Väite. Jos S:llä on refutaatio, on S toteutumaton.

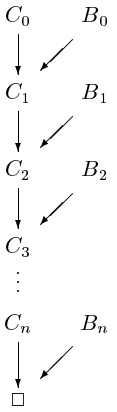
Todistus: Suoraan sillä perusteella, että jos on totuusjakelu $\mathcal{A}$ s.e. $\mathcal{A} \models C_1$ ja $\mathcal{A} \models C_2$, niin myös $\mathcal{A} \models C$ niiden resolventille C.

Väite. Jos S on toteutumaton, on S:llä refutaatio.

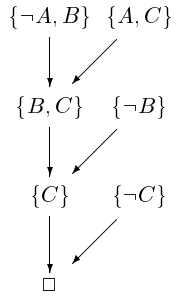
$S = \{A, B \vee C, \neg A \vee \neg B, \neg A \vee \neg C\}$



Lineaarinen resoluutio



Klausuulijoukko: $\{\{\neg A, B\}, \{A, C\}, \{\neg B\}, \{\neg C\}\}$



Logiikkaohjelmat

- *Horn-klausuuli* on klausuuli, jossa on enintään yksi positiivinen literaali.

  Esim. $\{A\}$, $\{A, \neg B, \neg C\}$, $\{\neg D, \neg E, \neg F\}$.

  Prologin notaatiolla: `A.` `A :- B, C.` `:- E, F.`

- *Ohjelmaklausuuli* on klausuuli, jossa on täsmälleen yksi positiviinen literaali.

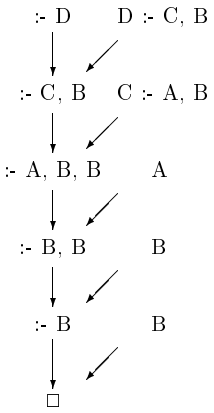
  Esim. $\{A\}$, $\{A, \neg B, \neg C\}$, $\{D, \neg E, \neg F\}$.

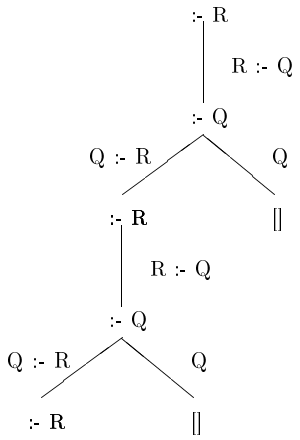
- *Maaliklausuuli* on klausuuli jossa on vain negatiivisia literaaleja.

- *Prolog-ohjelma* on joukko ohjelmaklausuuleja.

LI/LD/SLD resoluutio

```
A.
B.
C :- A, B.
D :- C, B.
Kysely :- D
```



Väite. Jos S on toteutumaton Prolog-ohjelma (joukko ohjelmaklausuuleja + maaliklausuuli), niin S:lle on olemassa SLD-refutaatio.

Prologin hakuproseduurin epätäydellisyys