Lauseen toteutuvuuden tutkiminen

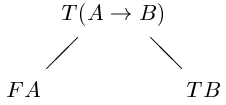
Määritelmä. Lause α on *toteutuva*, jos on olemassa valuaatio $\mathcal{V}$ siten, että $\mathcal{V}(\alpha) = T$.

Määritelmä. Lausejoukko Σ on *toteutuva*, jos on olemassa valuaatio $\mathcal{V}$ siten, että $\mathcal{V}(\alpha) = T$ kaikille $\alpha \in \Sigma$.

Huomaa, että

- lause α on toteutuva, jos $T\alpha$:n semanttisessa taulussa on ainakin yksi ei-ristiriitainen polku ja
- lause α on toteutuva, jos ja vain jos $\neg\alpha$ **ei ole** pätevä.

Esimerkki. Tarkastellaan lausetta $A \to B$ ja semanttista taulua, jonka juuressa on $T(A \to B)$.



Ainakin yksi polku on ei-ristiriitainen, joten $A \to B$ on toteutuva.

Lauseelle voidaan muodostaa malleja ei-ristiriitaisista poluista. Esimerkiksi valuaatio, jolle $\mathcal{V}(A) = F$ (vasen polku) ja $\mathcal{V}(B) = T$ (B:n totuusarvo vapaasti valittu), on malli lauseelle $A \to B$.

Huom. Taulumenetelmällä voidaan siis hakea lauseelle malleja.

Taulumenetelmän ominaisuuksia

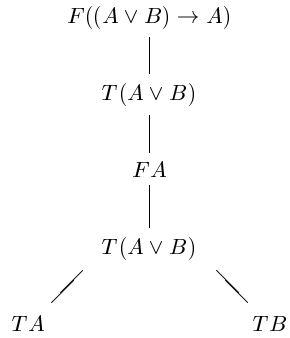
Väite. Jos α on todistettavissa semanttisen taulun avulla, niin α on pätevä (todistusmenetelmän virheettömyys).

Väite. Jos α on pätevä lause, niin α on todistettavissa semanttisen taulun avulla (todistusmenetelmän täydellisyys).

Kirjassa osoitetaan, että:

- Jos α ei ole pätevä, niin jokaisessa α:n semanttisessa taulussa on ei-ristiriitainen polku.
- Jos α:n semanttisessa taulussa on ei-ristiriitainen polku, niin α ei ole pätevä.

Jos jollekin valuaatiolle $\mathcal{V}(\alpha) = F$, **niin** $F\alpha$:n taulussa on ei-ristiriitainen polku, jonka jokaiselle alkiolle $T\beta$, $\mathcal{V}(\beta) = T$ ja alkiolle $F\beta$, $\mathcal{V}(\beta) = F$ (todistus induktiolla).



Esimerkissä $\mathcal{V}((A \vee B) \to A) = F$, $\mathcal{V}(A) = F$ ja $\mathcal{V}(B) = T$.

Jos $F\alpha$:n taulussa on ei-ristiriitainen polku,
niin jollekin valuaatiolle $\mathcal{V}(\alpha) = F$.

Olkoon P mikä tahansa $F\alpha$:n ei-ristiriitainen polku.

Olkoon valuaatio $\mathcal{V}$ seuraavanlainen.

- $\mathcal{V}(A) = T$, jos TA on polussa P (A on lausemuuttuja) ja
- $\mathcal{V}(A) = F$, muutoin.

Todistetaan induktiolla P:n alkioiden rakenteen suhteen, että $\mathcal{V}(\beta) = T$ kaikille $T\beta \in P$, ja $\mathcal{V}(\beta) = F$ kaikille $F\beta \in P$.

Perustapaus: TA tai FB, missä A, B ovat lausemuuttujia.
Valuaation $\mathcal{V}$ määritelmän perusteella $\mathcal{V}(A) = T$ ja $\mathcal{V}(B) = F$.

Induktioaskel: Tutkitaan kaikki tapaukset
$T(\alpha \wedge \beta), F(\alpha \wedge \beta), T(\alpha \vee \beta), F(\alpha \vee \beta), T(\alpha \to \beta), F(\alpha \to \beta), \ldots$.

- $F(\alpha \to \beta) \in P$, jolloin $T\alpha \in P$ ja $F\beta \in P$:

  Induktio-oletuksella $\mathcal{V}(\alpha) = T, \mathcal{V}(\beta) = F$.

  Totuustaulukkojen perusteella tällöin $\mathcal{V}(\alpha \to \beta) = F$.

- $T(\alpha \to \beta) \in P$, jolloin $F\alpha \in P$ tai $T\beta \in P$:

  Induktio-oletuksella $\mathcal{V}(\alpha) = F$ jos $F\alpha \in P$, tai $\mathcal{V}(\beta) = T$ jos $T\beta \in P$.

  Totuustaulukkojen perusteella tällöin $\mathcal{V}(\alpha \to \beta) = T$.

- muut kohdat samalla tavalla

Johdettavuus lausejoukosta

Tutkitaan lauseen β *johdettavuutta* äärellisestä lausejoukosta $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Rakennetaan valmis semanttinen taulu edellisellä luennolla opittuun tapaan lähtien seuraavasta taulusta.

$$
\begin{array}{c}
F\beta \\
| \\
T\alpha_1 \\
| \\
\vdots \\
| \\
T\alpha_n
\end{array}
$$

Hilbert-tyyppinen lauselogiikan aksiomatisointi

Aksioomat:

1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
3. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \alpha)$

Päättelysääntö:

$$\frac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}$$

(modus ponens)

Määritelmä. Olkoon Σ joukko lauseita.

Todistus Σ:sta on jono lauseita $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ siten että kaikille $i \in \{1, \ldots, n\}$

- $\alpha_i \in \Sigma$,
- α_i on aksiooma tai
- α_i on saatu modus ponensilla lauseista $\alpha_j, j < i$ ja $\alpha_k = (\alpha_j \to \alpha_i), k < i$.

Lause α on *johdettavissa* Σ:sta, jos on olemassa todistus $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Σ:sta ja $\alpha = \alpha_n$. $(\Sigma \vdash \alpha)$

Lause α on *teoreema* (todistuva) jos se on johdettavissa tyhjästä lausejoukosta $\Sigma = \emptyset$. $(\vdash \alpha)$

Esimerkki. Osoitetaan $\{A, B \to (A \to C)\} \vdash B \to C$.

1.	A	olettamus
2.	$B \to (A \to C)$	olettamus
3.	$A \to (B \to A)$	aksiooma 1
4.	$B \to A$	MP, 1, 3
5.	$(B \to (A \to C)) \to ((B \to A) \to (B \to C))$	aksiooma 2
6.	$(B \to A) \to (B \to C)$	MP, 2, 5
7.	$B \to C$	MP, 4, 6

Normaalimuodot

- Polynomien esittäminen muodossa:

$$c_0 \cdot x^0 + c_1 \cdot x^1 + \cdots + c_n \cdot x^n$$

- Lineaaristen yhtälöryhmien esittäminen matriiseina:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- Normaalimuotojen tarkoituksena on siis saattaa tutkittava asia sellaiseen yksinkertaiseen säännölliseen muotoon, jossa sen käsittely saadaan yksinkertaisemmaksi.

Määritelmä. Jos A on lausemuuttuja, niin A ja $\neg A$ ovat *literaaleja.*

Määritelmä. Lause α on *konjunktiivisessa normaalimuodossa* jos α on muotoa $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_n$, ja kukin β_i on disjunktio $l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_{m_i}$, missä $l_1, l_2, \ldots, l_{m_i}$ ovat literaaleja.

Esimerkki.

$$(A_1 \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_3) \wedge (A_5 \vee A_6 \vee A_7)$$
$$A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3$$
$$(A_1 \vee \neg A_1) \wedge A_2$$
$$\neg A_7$$
$$A_1 \vee A_2 \vee A_3$$

Määritelmä. Lause α on *disjunktiivisessa normaalimuodossa* jos α on muotoa $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_n$, ja kukin β_i on konjunktio $l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_{m_i}$, missä $l_1, l_2, \ldots, l_{m_i}$ ovat literaaleja.

Esimerkki.

$$(\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_3 \wedge A_1) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$$
$$A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3$$
$$(A_1 \wedge \neg A_1) \vee A_2$$
$$\neg A_7$$
$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$$

Väite. Jokaiselle lauselogiikan lauseelle α on olemassa konjunktiivisessa (disjunktiivisessa) normaalimuodossa oleva lause β, joka on loogisesti ekvivalentti α:n kanssa.

Määritelmä. Sanotaan, että em. β on α:n konjunktiivinen (disjunktiivinen) normaalimuoto.

Esimerkki. $A \vee (\neg B \wedge C)$ on loogisesti ekvivalentti konjunktiivisessa normaalimuodossa olevan lauseen $(A \vee \neg B) \wedge (A \vee C)$ kanssa.

A	B	C	$\neg B$	$\neg B \wedge C$	$A \vee \neg B$	$A \vee C$	$A \vee (\neg B \wedge C)$	$(A \vee \neg B) \wedge (A \vee C)$
F	F	F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	T	T
T	T	T	F	F	T	T	T	T

Mikä hyvänsä lauselogiikan lause voidaan muuttaa konjunktiiviseen (disjunktiiviseen) normaalimuotoon seuraavalla menettelyllä.

1. Poista konnektiivit $\leftrightarrow$ seuraavanlaisilla korvauksilla:

   $\alpha \leftrightarrow \beta \quad \Rightarrow \quad (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \qquad (1)$

   $\alpha \leftrightarrow \beta \quad \Rightarrow \quad (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha) \qquad (1')$

2. Poista konnektiivit $\rightarrow$ seuraavanlaisilla korvauksilla:

   $\alpha \rightarrow \beta \quad \Rightarrow \quad \neg\alpha \vee \beta \qquad (2)$

3. Siirrä negaatiot välittömästi lausemuuttujien eteen:

   $\neg\neg\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \qquad (3)$

   $\neg(\alpha \vee \beta) \quad \Rightarrow \quad \neg\alpha \wedge \neg\beta \qquad (4)$

   $\neg(\alpha \wedge \beta) \quad \Rightarrow \quad \neg\alpha \vee \neg\beta \qquad (5)$

4. (CNF) Lopuksi siirrä $\wedge$-konnektiivit $\vee$-konnektiivien ulkopuolelle:

   $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \quad \Rightarrow \quad (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \qquad (6)$

   $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \quad \Rightarrow \quad (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \qquad (7)$

   Tai (DNF) siirrä $\vee$-konnektiivit $\wedge$-konnektiivien ulkopuolelle:

   $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \quad \Rightarrow \quad (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \qquad (8)$

   $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \quad \Rightarrow \quad (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \qquad (9)$

Normaalimuodon voi hakea myös taulumenetelmällä (selvittää lauseen mallit ja muodostaa disjunktiivisen normaalimuodon).

Lauseelle α saadaan konjunktiivinen normaalimuoto lauseen $\neg\alpha$ disjunktiivisesta normaalimuodosta sääntöjen (3)-(5) avulla.

Esimerkki. Muutetaan lause $(A \vee B) \to (B \leftrightarrow C)$ konjunktiiviseen normaalimuotoon.

$$(A \vee B) \to (B \leftrightarrow C)$$

$$(A \vee B) \to ((B \to C) \wedge (C \to B)) \qquad (1)$$

$$\neg(A \vee B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \qquad (2)$$

$$(\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \qquad (4)$$

$$(\neg A \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \qquad (5)$$

$$((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \qquad (6)$$

$$((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge ((\neg B \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg B \vee (\neg C \vee B))) \qquad (6)$$

$$(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee B)$$