Lauselogiikan semantiikka

- milloin lauselogiikan lause on *tosi* tai *epätosi*
- mitkä lauseet ovat *päteviä*
- milloin lause on joidenkin toisten lauseiden *looginen seuraus*

Perustotuustaulukot

α	$\neg\alpha$
t	e
e	t

α	β	$(\alpha \wedge \beta)$
t	t	t
t	e	e
e	t	e
e	e	e

α	β	$(\alpha \vee \beta)$
t	t	t
t	e	t
e	t	t
e	e	e

α	β	$(\alpha \rightarrow \beta)$
t	t	t
t	e	e
e	t	t
e	e	t

α	β	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$
t	t	t
t	e	e
e	t	e
e	e	t

Määritelmä. Lauseen *alilauseet*:

Lauseen A, joka on lausemuuttuja, ainoa alilause on A.

Lauseen $\neg\alpha$ alilauseita ovat α:n alilauseet ja $\neg\alpha$.

Lauseen $(\alpha \wedge \beta)$ alilauseita ovat α:n ja β:n alilauseet ja $(\alpha \wedge \beta)$.

Lauseiden $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ ja $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ alilauseet määritellään samalla tavalla kuin $(\alpha \wedge \beta)$:n.

Esimerkki. Lauseen $(A \rightarrow (B \vee C))$ alilauseet ovat $A, B, C, (B \vee C)$ ja $(A \rightarrow (B \vee C))$.

Esimerkki. Tutkittava lause: $(\neg B \wedge (A \rightarrow B))$
Alilauseet: $A, B, \neg B, (A \rightarrow B), (\neg B \wedge (A \rightarrow B))$
Sarakkeita: 5
Rivejä: $2^2 = 4$.

A	B	$\neg B$	$(A \rightarrow B)$	$(\neg B \wedge (A \rightarrow B))$
t	t	e	t	e
t	e	t	e	e
e	t	e	t	e
e	e	t	t	t

Konnektiivien määriteltävyys/riittävyys

Konnektiivit $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ eivät ole kaikki välttämättömiä:

- $\neg, \vee$
- $\neg, \wedge$
- $\neg, \rightarrow$

Esim.

- $(\alpha \wedge \beta)$ lauseena $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
- $(\alpha \rightarrow \beta)$ lauseena $(\neg\alpha \vee \beta)$ tai lauseena $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$
- $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ lauseena $((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta))$

Sulkeitten käytöstä

- uloimmat sulkeet tapana jättää pois: $A \rightarrow B$ eikä $(A \rightarrow B)$
- ketjudisjunktiot/konjunktiot: $A \vee B \vee C \vee D$ eikä $A \vee (B \vee (C \vee D))$
- konnektiivien presedenssi
  1. $\neg$ on vahvin konnektiiveista
  2. $\vee$, $\wedge$ ovat heikompia kuin $\neg$, mutta vahvempia kuin $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  3. Esim. $A \wedge B \rightarrow B \vee C$ eikä $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee C)$
  4. Mutta $(A \rightarrow B) \vee (B \leftrightarrow C)$

Valuaatiot

Määritelmä. *Totuusjakelu* kielelle L on funktio kielen *lausemuuttujien joukolta* joukolle $\{T, F\}$.

Määritelmä. *Valuaatio* kielelle L on sellainen funktio kielen *lauseiden joukolta* joukolle $\{T, F\}$, joka **noudattaa konnektiivien totuustaulukkoja**.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(A) &= T \\ \mathcal{V}(B) &= F \\ \mathcal{V}((A \wedge B)) &= F \end{aligned}$$

Väite. Jokaiselle totuusjakelulle $\mathcal{A}$ on olemassa täsmälleen yksi valuaatio $\mathcal{V}$ siten että $\mathcal{V}(P) = \mathcal{A}(P)$ kaikille lausemuuttujille P.

Väite. Jos $\mathcal{V}_1(P) = \mathcal{V}_2(P)$ kaikille α:ssa esiintyville lausemuuttujille P, niin $\mathcal{V}_1(\alpha) = \mathcal{V}_2(\alpha)$.

A	B	$A \rightarrow B$	valuaatiot
t	t	t	$\mathcal{V}(A) = T, \quad \mathcal{V}(B) = T, \quad \mathcal{V}(C) = ?$
t	e	e	$\mathcal{V}(A) = T, \quad \mathcal{V}(B) = F, \quad \mathcal{V}(C) = ?$
e	t	t	$\mathcal{V}(A) = F, \quad \mathcal{V}(B) = T, \quad \mathcal{V}(C) = ?$
e	e	t	$\mathcal{V}(A) = F, \quad \mathcal{V}(B) = F, \quad \mathcal{V}(C) = ?$

Huom. Jos lauseelle α ja valuaatiolle $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}(\alpha) = T$, niin $\mathcal{V}$:tä sanotaan α:n *malliksi*.

Määritelmä. Lause σ on *pätevä* (*tautologia*) jos kaikille valuaatiolle $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}(\sigma) = T$ (merkintätapa $\models \sigma$).

Määritelmä. Lauseet α ja β ovat *loogisesti ekvivalentteja* jos kaikille valuaatioille $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}(\alpha) = \mathcal{V}(\beta)$.

Määritelmä. Olkoon Σ (mahdollisesti ääretön) joukko lauseita. Lause α on Σ:n looginen seuraus (merkintätapa $\Sigma \models \alpha$), jos $\mathcal{V}(\alpha) = T$ kaikille valuaatioille $\mathcal{V}$, joille $\mathcal{V}(\sigma) = T$ jokaiselle $\sigma \in \Sigma$.

Esimerkkejä

Onko lause $(A \vee \neg A)$ pätevä?

A	$\neg A$	$(A \vee \neg A)$
t	e	t
e	t	t

Onko lause $(A \to (A \vee B))$ pätevä?

A	B	$(A \vee B)$	$(A \to (A \vee B))$
t	t	t	t
t	e	t	t
e	t	t	t
e	e	e	t

Onko lause $(A \vee \neg B)$ pätevä?

A	B	$\neg B$	$(A \vee \neg B)$
t	t	e	t
t	e	t	t
e	t	e	e
e	e	t	t

Ovatko lauseet $A \to B, \neg B \to \neg A$ loogisesti ekvivalentit?

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \to B$	$\neg B \to \neg A$
t	t	e	e	t	t
t	e	e	t	e	e
e	t	t	e	t	t
e	e	t	t	t	t

Seuraako D loogisesti lausejoukosta $\{A, (A \to D)\}$?

A	D	$(A \to D)$
t	t	t
t	e	e
e	t	t
e	e	t

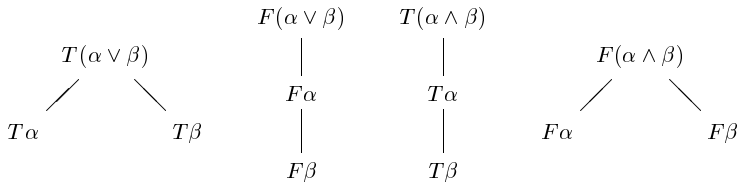
Seuraako B loogisesti lausejoukosta $\{(A \to B)\}$?

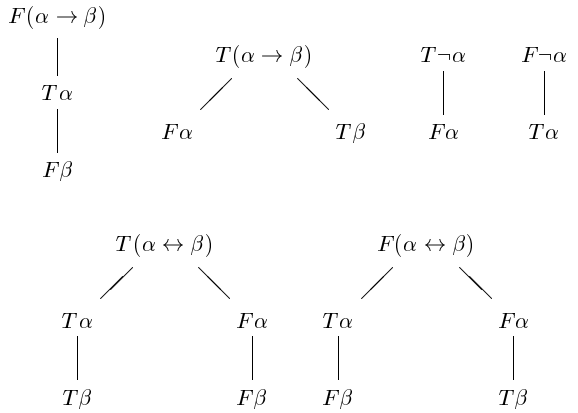
A	B	$(A \to B)$
t	t	t
t	e	e
e	t	t
e	e	t

Huomaa, että $\Sigma \models A \vee \neg A$ kaikille lausejoukoille Σ !!!

Lauselogiikan semanttinen taulu

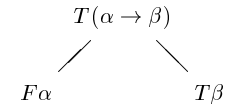
Atomiset taulut





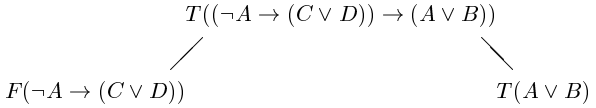
Atomisen taulun instantiointi

Lause γ: $((\neg A \to (C \vee D)) \to (A \vee B))$



$\alpha = (\neg A \to (C \vee D))$

$\beta = (A \vee B)$

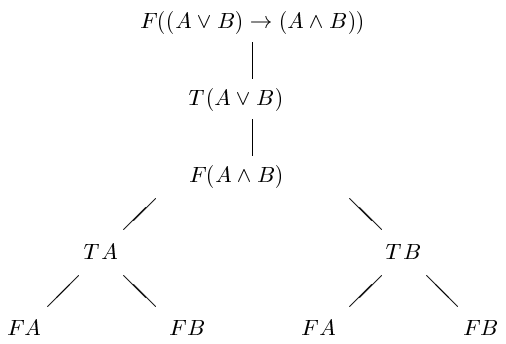


Määritelmä. *Äärellinen taulu* on binääripuu, jonka solmuina on T:llä ja F:llä merkittyjä lauseita (puun alkioita), ja joka on seuraavien ehtojen mukainen.

- Jokainen atominen taulu on äärellinen taulu.
- Jos τ on äärellinen taulu, P on polku τ:ssa, E on τ:n alkio polussa P, ja τ' on saatu τ:sta liittämällä E:n atominen taulu τ:hun polun P jatkoksi, niin τ' on myöskin äärellinen taulu.

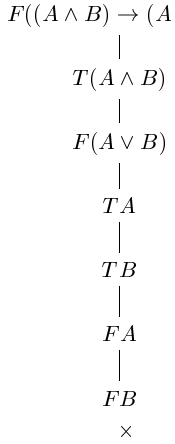
(Kirjassa määritellään myös *äärettömät taulut*, joita emme lauselogiikan kohdalla tarvitse.)

Esimerkki.



Määritelmä. Olkoon τ taulu, P polku τ:ssa ja E polun P alkio.

1. E on *hajoitettu*, jos E:n atomisen taulun jonkun polun jokainen alkio on P:n alkio.
2. P on *ristiriitainen*, jos siinä esiintyy sekä $T\alpha$ että $F\alpha$ jollekin lauseelle α.
3. P on *valmis*, jos se on ristiriitainen tai jokainen sen alkioista on hajoitettu.
4. τ on *valmis*, jos jokainen sen poluista on valmis.
5. τ on *ristiriitainen*, jos jokainen sen poluista on ristiriitainen.

Määritelmä. Taulu τ on lauseen α *todistus*, jos τ on ristiriitainen ja sen juuressa on $F\alpha$. Jos α:lla on todistus, on α *teoreema* ($\vdash \alpha$).

Esimerkki. Todistetaan lause $(A \wedge B) \to (A \vee B)$.