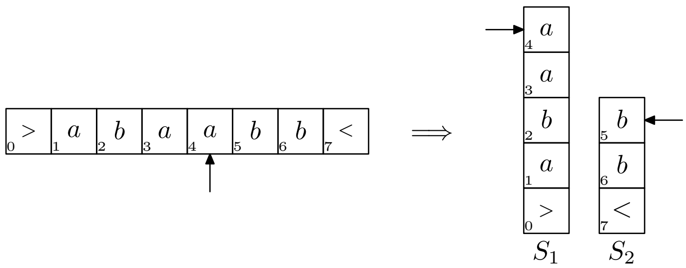
T-79.148 **Syksy 2007**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Harjoitus 9
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. **Tehtävä**: Osoita, että pinoautomaateilla, joilla on yhden sijasta kaksi pinoa, voidaan tunnistaa täsmälleen samat kielet kuin Turingin koneilla.

   Vastaus: Osoitetaan ensin, että pinoautomaatilla, jossa on kaksi pinoa, voidaan simuloida Turingin konetta. Ainut hankaluus tässä on keksiä, miten kahdella pinolla simuloidaan Turingin koneen nauhaa. Tämä onnistuu siten, että toiseen pinoon talletetaan lukupään vasemmalla puolella olevat merkit käänteisessä järjestyksessä, toiseen pinoon pään oikealla puolella olevat merkit:



Pinoautomaatin toiminta jakautuu kahteen vaiheeseen:

(a) Alustus, jolloin automaatti kopioi syötteen pinoon S_1, mistä se siirtään merkki kerrallaan pinoon S_2 lukuunottamatta syötteen ensimmäistä merkkiä.

(b) Varsinainen toiminta, jolloin automaatti tekee siirtymän pinon S_1 päällimmäisen merkin perusteella. Mikäli Turingin kone siirtäisi lukupäätä vasemmalle, siirretään pinon S_1 päällimmäinen merkki pinon S_2 päälle. Mikäli taas lukupää siirtyisi oikealle, siirretään S_2:n päällimmäinen merkki S_1:n päälle.

Näin laadittu pinoautomaatti simuloi annettua Turingin konetta.

Seuraavaksi osoitetaan, että Turingin koneella voidaan simuloida pinoautomaattia, jossa on kaksi pinoa. Tämä onnistuu triviaalisti käyttämällä kaksinauhaista epädeterminístä Turingin konetta, jossa kumpikin pinoista talletetaan omalle nauhalleen.

Formaalisti annettu muunnos Turingin koneesta kaksipinoiseksi pinoautomaatiksi voidaan määritellä seuraavasti:

Olkoon annettuna Turingin kone $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\mathrm{acc}}, q_{\mathrm{rej}}\}$. Muodostetaan 2-pinoinen pinoautomaatti $M' = (Q', \Sigma', \Gamma', \delta', p_0, q_{\mathrm{acc}}, q_{\mathrm{rej}})$, missä:

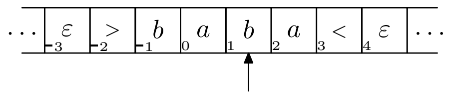
$$
\begin{aligned}
Q' =& Q \cup \{p_0, p_1, p_2\} \\
\Sigma' =& \Sigma \cup \{<\} \\
\Gamma' =& \Gamma \cup \{>, <\} \\
\delta' =& \{((p_0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon), (p_1, >, \varepsilon)), ((p_1, <, \varepsilon, \varepsilon), (p_2, \varepsilon, <))\} \\
& \cup \{((p_1, x, \varepsilon, \varepsilon), (p_1, x, \varepsilon)) \mid x \in \Sigma\} \\
& \cup \{((p_2, \varepsilon, x, \varepsilon), (p_2, \varepsilon, x)) \mid x \in \Sigma\} \\
& \cup \{((q_1, \varepsilon, a, \varepsilon), (q_2, \varepsilon, b)) \mid (q_1, a, q_2, b, L) \in \delta\} \\
& \cup \{((q_1, \varepsilon, a, x), (q_2, xb, \varepsilon)) \mid (q_1, a, q_2, b, R) \in \delta, x \in \Gamma'\}
\end{aligned}
$$

5. **Tehtävä**: Määrittele Turingin koneen standardimallin muunnelma, jossa koneen työnauha on molempiin suuntiin ääretön, ja osoita että tällaisilla koneilla voidaan tunnistaa täsmälleen samat kielet kuin standardimallisillakin.

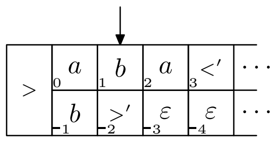
   Vastaus:

   Turingin kone, jonka nauha on kahteen suuntaan ääretön, toimii muuten samoin kuin tavallinen, mutta nyt nauhan alkumerkki ei ole kiinteä, ja kone voi siirtää sitä samaan tapaan kuin loppumerkkiäkin. Nauhan paikat indeksoidaan kokonaisluvuilla $\mathbb{Z}$, ja luku 0 osoittaa alkumerkin paikkaa laskennan alussa.

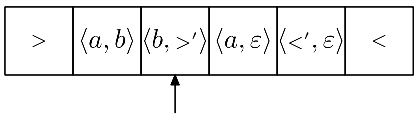
   Tällaista Turingin konetta voidaan simuloida kaksiuraisella koneella. Koneen nauha ajatellaan jaetuksi kahteen osaan, ylä- ja alapuoleen. Yläosaa käytetään nauhan paikkojen $i \geq 0$ tallettamiseen, alaosaa paikoille $i < 0$. Esimerkiksi nauhan sisältö:



   esitetään 2-uraisella koneella seuraavasti:



   Käytännössä nauhan jakaminen uriin tapahtuu korvaamalla aakkosto Σ uudella aakkostolla $\Sigma' = (\Sigma \cup \{<', >', \varepsilon\}) \times (\Sigma \cup \{<', >', \varepsilon\})$. Kukin Σ':n merkki vastaa näin kahta alkuperäisen aakkoston merkkiä. Merkit $\{<', >'\}$ ovat uusia symboleja, joilla osoitetaan nauhanpuoliskojen alku- ja loppukohdat, ja ε merkitsee nauhan ulkopuolella olevia soluja. Ylläoleva esimerkki muodostuukin seuraavanlaiseksi:



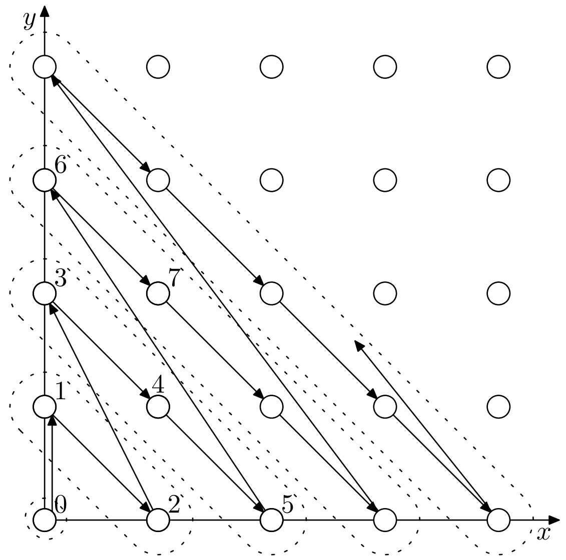
   Vielä tarvitaan tapa osoittaa kumpaa nauhan puoliskoa käsitellään. Helpoiten tämä onnistuu määrittelemällä kaikille koneen tiloille q peilikuvatila q'. Kun kone on tilassa q, se tekee siirtonsa ainoastaan ylemmän uran merkkien perusteella (lukupää on nollan oikealla puolella), ja tilassa q' siirrytään alemman uran mukaisesti (lukupää nollan vasemmalla puolella). Koska alempi ura on käänteisessä järjestyksessä, täytyy sitä käsitellessä kääntää lukupään siirto-operaatiot myös peilikuviksi. Aina kun kone lukee nauhan aidon alkumerkin $>$, se vaihtaa käsiteltävää uraa.

   Konstruktion formaali esitys jätetään liitteeseen.

6. **Tehtävä:** Osoita, että karteesinen tulo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on numeroituvasti ääretön. (*Vihje:* Ajattele parit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sijoitetuiksi euklidiseen (x, y)-tasoon $\mathbb{R}^2$. Numeroi parit suoran $y = -x$ suuntaisin vinorivein.) Päättele tämän tuloksen perusteella, että myös rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituvasti ääretön.

   Vastaus: Joukko S on numeroituvasti ääretön, mikäli voidaan muodostaa bijektio $f : \mathbb{N} \to S$. Intuitiivisesti tämä tarkoittaa sitä, että kaikille joukon S alkioille voidaan asettaa yksikäsitteinen järjestysnumero.

   Joukon $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alkiot $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ voidaan numeroida seuraavan kuvan mukaisesti:



Ajatuksena on siis järjestää kaikki lukuparit suoran $y = -x$ suuntaisiin jonoihin, ja numeroida nämä jonot alkioittain yksi kerrallaan lyhyimmästä alkaen. Tässä numerointia ei voida suorittaa x-akselin suuntaisesti, sillä silloin kaikki indeksit kuluisivat jo y-akselin läpikäyntiin eikä yhtään lukuparia $(x, y), y > 0$ saavutettaisi koskaan.

Ylläoleva numerointi voidaan määritellä seuraavasti:

$$f(x, y) = x + \sum_{k=1}^{x+y} k = x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$$

Esimerkiksi $f(3, 1) = 13$, eli lukuparin $(3, 1)$ järjestysnumero on 13. Todettakoon vielä, että funktio $f(x, y)$ on todellakin bijektio, eli kutakin järjestysnumeroa vastaa yksikäsitteinen lukupari. Koordinaattiparin laskeminen annetusta indeksistä on kuitenkin hankalampaa, ja se jätetäänkin vastausten lopussa olevaan liitteeseen tiedoksi asiasta kiinnostuneille.

Positiiviset rationaaliluvut $\mathbb{Q}^+$ voidaan esittää $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ -lukuparina s.e.

$$(x, y) \equiv \frac{x}{y}, \qquad y \neq 0$$

Tämä on numeroituvasti äärettömän joukon $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aito osajoukko, joten $\mathbb{Q}^+$ on joko äärellinen tai numeroituvasti ääretön. Jos $\mathbb{Q}^+$ olisi äärellinen, olisi olemassa joku rationaaliluku $\frac{x}{y}, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, y \neq 0$, jolla olisi suurin järjestysluku $n < \infty$ ($\mathbb{Q}^+$:n numeroinnissa). Kuitenkin voidaan aina löytää yo. kuvan perusteella rationaaliluku, jolla olisi järjestysluku $n' > n$, joten tämä on ristiriita oletuksen $\mathbb{Q}^+$ on äärellinen kanssa. Näin ollen $\mathbb{Q}^+$ on numeroituvasti ääretön.

Joukko $\mathbb{Q}^+$ voidaan laajentaa kaikkien rationaalilukujen joukoksi määrittelemällä joukko:

$$\mathbb{Q}^- = \{(-x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{Q}^+\} \ .$$

Koska joukko $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ on kahden numeroituvasti äärettömän joukon yhdiste, on myös se numeroituvasti ääretön.

Liite. 4. tehtävän konstruktio formaalisti

Olkoon $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ Turingin kone, jolla on kahteen suuntaan ääretön nauha. Muodostetaan standardimallinen Turingin kone M' seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
M' =&(Q', \Sigma', \Gamma', \delta', q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}) \\
Q' =&Q \cup \{q' \mid q \in Q\} \\
\Sigma' =&(\Sigma \cup \{<', >', \varepsilon\}) \times (\Sigma \cup \{<', >', \varepsilon\}) \\
\Gamma' =&(\Gamma \cup \{<', >', \varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{<', >', \varepsilon\})
\end{aligned}
$$

Tilansiirtofunktio δ' muodostetaan seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\delta' = &\{(q_1, \langle a, \gamma \rangle, q_2, \langle b, \gamma \rangle, \Delta) \mid (q_1, a, q_2, b, \Delta) \in \delta, \gamma \in \Gamma'\} \\
&\cup \{(q_1, \langle \sigma', \gamma \rangle, q_2, \langle b, \gamma \rangle, \Delta) \mid (q_1, \sigma, q_2, b, \Delta) \in \delta, \gamma \in \Gamma', \sigma \in \{<, >\}\} \\
&\cup \{(q_1', \langle \gamma, a \rangle, q_2', \langle \gamma, b \rangle, \overline{\Delta}) \mid (q_1, a, q_2, b, \Delta) \in \delta, \gamma \in \Gamma'\} \\
&\cup \{(q', \langle \gamma, a \rangle, q_{\text{end}}, \langle \gamma, b \rangle, \overline{\Delta}) \mid (q, a, q_{\text{end}}, b, \Delta) \in \delta, q_{\text{end}} \in \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}, \gamma \in \Gamma'\} \\
&\cup \{(q_1', \langle \gamma, \overline{\sigma}' \rangle, q_2', \langle \gamma, b \rangle, \overline{\Delta}) \mid (q_1, \sigma, q_2, b, \Delta) \in \delta, \gamma \in \Gamma', \sigma \in \{<, >\}\} \\
&\cup \{(q, >, q', >, R), (q', >, q, >, R) \mid q \in Q\},
\end{aligned}
$$

missä $\overline{L} = R$, $\overline{R} = L$, $\overline{<} = >$ ja $\overline{>} = <$.