T-79.1001 **Syksy 2007**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet T
Harjoitus 8
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. **Tehtävä**: Osoita, että yhteydettömien kielten luokka ei ole suljettu leikkausten eikä komplementtien suhteen. (*Vihje:* Esitä kieli $\{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$ kahden yhteydettömän kielen leikkauksena.)

   Vastaus: Olkoon kieli $L = \{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$. Opetusmonisteessa (s.75) on todistettu, että tämä kieli ei ole yhteydetön. Osoitetaan, että yhteydettömät kielet eivät ole suljettuja leikkauksen suhteen esittämällä L:n kahden yhteydettömän kielen leikkauksena.

   Olkoon $L_1 = \{a^i b^k c^k \mid i, k \geq 0\}$ ja $L_2 = \{a^k b^k c^i \mid i, k \geq 0\}$. Nyt sekä L_1 että L_2 ovat yhteydettömiä, mutta $L = L_1 \cap L_2$, joten yhteydettömät kielet eivät ole suljettuja leikkauksen suhteen.

   Tuloksesta seuraa suoraan se, että yhteydettömät kielet eivät voi olla suljettuja komplementin suhteen, sillä ne ovat suljettuja unionin suhteen ja DeMorganin sääntöjen perusteella $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.

   Osoitetaan vielä lopuksi, että L_1 ja L_2 ovat todellakin yhteydettömiä muodostamalla niitä vastaavat kieliopit. Kielen L_1 generoi yhteydetön kielioppi $G_1 = (\{S, A, B, a, b, c\}, \{a, b, c\}, P_1, S)$, missä $P_1 = \{S \to AB, A \to aA \mid \varepsilon, B \to bBc \mid \varepsilon\}$.

   Kielen L_2 generoiva kielioppi $G_2 = (\{S, A, B, a, b, c\}, \{a, b, c\}, P_2, S)$, $P_2 = \{S \to AB, A \to aAb \mid \varepsilon, B \to cB \mid \varepsilon\}$.

5. **Tehtävä**: Muodosta kielioppia $G = (V, \Sigma, P, S)$ vastaava pinoautomaatti, kun

$$\begin{aligned}
V &= \{S, (,), {}^*, \cup, \emptyset, a, b\} \\
\Sigma &= \{(,), {}^*, \cup, \emptyset, a, b\} \\
P &= \{S \to (SS), S \to S^*, S \to (S \cup S), \\
&\qquad S \to \emptyset, S \to a, S \to b\}
\end{aligned}$$

   Vastaus: Mitä tahansa yhteydetöntä kielioppia $G = (V, \Sigma, R, S)$ vastaava epädeterministinen pinoautomaatti $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ voidaan laatia seuraavasti:

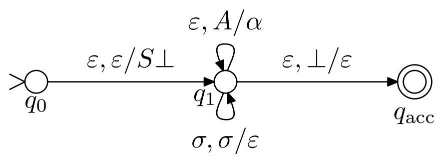
$$\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_{\mathrm{acc}}\} \\
\Gamma &= V \cup \{\perp\} \\
F &= \{q_{\mathrm{acc}}\} \\
\delta &= \{\big((q_0, \varepsilon, \varepsilon), (q_1, S\perp)\big), \big((q_1, \varepsilon, \perp), (q_{\mathrm{acc}}, \varepsilon)\big)\} && (1) \\
&\quad \cup \{\big((q_1, \varepsilon, A), (q_1, \alpha)\big) \mid (A \to \alpha) \in P\} && (2) \\
&\quad \cup \{\big((q_1, \sigma, \sigma), (q_1, e)\big) \mid \sigma \in \Sigma\} && (3)
\end{aligned}$$

   Tässä symbolia $\perp$ käytetään pinon pohjan merkkinä.

Tehtävän kieliopille konstruktio tuottaa seuraavan pinoautomaatin:

$$
\begin{aligned}
Q =& \{q_0, q_1, q_{\text{acc}}\} \\
\Sigma =& \{(,), ^*, \cup, \emptyset, a, b\} \\
\Gamma =& \{S, (,), ^*, \cup, \emptyset, a, b, \perp\} \\
F =& \{q_{\text{acc}}\} \\
\delta =& \big\{ \big((q_0, \varepsilon, \varepsilon), (q_1, S\perp)\big), \big((q_1, \varepsilon, \perp), (q_{\text{acc}}, \varepsilon)\big), \big((q_1, \varepsilon, S), (q_1, (SS))\big), \\
& \big((q_1, \varepsilon, S), (q_1, S^*)\big), \big((q_1, \varepsilon, S), (q_1, (S \cup S))\big), \big((q_1, \varepsilon, S), (q_1, \emptyset)\big), \\
& \big((q_1, \varepsilon, S), (q_1, a)\big), \big((q_1, \varepsilon, S), (q_1, b)\big), \\
& \big((q_1, (, (), (q_1, \varepsilon)\big), \big((q_1,),)), (q_1, \varepsilon)\big), \big((q_1, ^*, ^*), (q_1, \varepsilon)\big), \\
& \big((q_1, \cup, \cup), (q_1, \varepsilon)\big), \big((q_1, \emptyset, \emptyset), (q_1, \varepsilon)\big), \big((q_1, a, a), (q_1, \varepsilon)\big), \\
& \big((q_1, b, b), (q_1, \varepsilon)\big) \big\}
\end{aligned}
$$

Syntynyt automaatti on muotoa:



Tarkastellaan, miten automaatti käsittelee syötteen $(a \cup b^*)$:

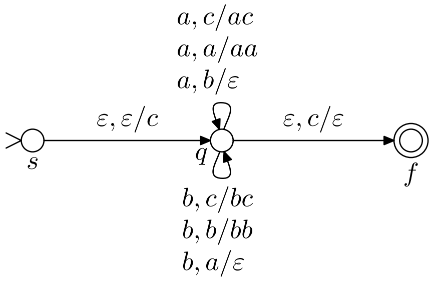
Tila	Syöte	Pino	Sääntö
q_0	$(a \cup b^*)$	ε	
q_1	$(a \cup b^*)$	$S\perp$	(1)
q_1	$(a \cup b^*)$	$(S \cup S)\perp$	(2) $(S \to (S \cup S))$
q_1	$a \cup b^*)$	$S \cup S)\perp$	(3)
q_1	$a \cup b^*)$	$a \cup S)\perp$	(2) $(S \to a)$
q_1	$\cup b^*)$	$\cup S)\perp$	(3)
q_1	$b^*)$	$S^*)\perp$	(2) $(S \to S^*)$
q_1	$b^*)$	$b^*)\perp$	(2) $(S \to b)$
q_1	$^*)$	$^*)\perp$	(3)
q_1	$)$	$)\perp$	(3)
q_1	ε	$\perp$	(3)
q_{acc}	ε	ε	(1)

Huom. kieli $L(G)$ määrittelee kaikki syntaktisesti oikeanmuotoiset aakkoston $\Sigma = \{a, b\}$ yli muodostetut säännölliset lausekkeet.

6. **Tehtävä**: Muodosta pinoautomaattia M vastaava kielioppi, missä $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$:

$$
\begin{aligned}
Q =& \{s, q, f\} \\
\Sigma =& \{a, b\} \\
\Gamma =& \{a, b, c\} \\
F =& \{f\} \\
\delta =& \big\{ \big((s, \varepsilon, \varepsilon), (q, c)\big), \big((q, a, c), (q, ac)\big), \big((q, a, a), (q, aa)\big) \\
& \big((q, a, b), (q, \varepsilon)\big), \big((q, b, c), (q, bc)\big), \big((q, b, b), (q, bb)\big) \\
& \big((q, b, a), (q, \varepsilon)\big), \big((q, \varepsilon, c), (f, \varepsilon)\big) \big\}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Tilakaaviona M näyttää seuraavalta:



Pinoautomaattia vastaavan yhteydettömän kieliopin selvittäminen on suhteellisen työlästä. Tässä käytetään algoritmia, jotka toimii vain *yksinkertaisille* pinoautomaateille. Pinoautomaatti on yksinkertainen, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat:

- Jos $\big((q,u,\beta),(p,\gamma)\big)$ on pinoautomaatin siirtymä, niin $|\beta| \leq 1$.
- Jos $\big((q,u,e),(p,\gamma)\big) \in \delta$, niin myös $\big((q,u,A),(p,\gamma A)\big) \in \delta$ kaikille $A \in \Gamma$.

Rajoitukset eivät kuitenkaan heikennä pinoautomaattien ilmaisuvoimaa, sillä mikä tahansa pinoautomaatti voidaan muuttaa yksinkertaiseksi (yksityiskohdat sivuutetaan tässä).

Kieliopin muodostamisen ajatuksena on ottaa kielen välikkeiksi kolmikkoja $\langle q, A, p\rangle$, missä $q, p \in Q$ ja $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$. Ajatuksena on, että $\langle q, A, p\rangle$ generoi kaikki ne merkkijonot, joita tutkiessaan automaatti siirtyisi tilasta q tilaan p poistaen samalla pinosta symbolin A.

Kieliopin sääntöjä on neljänlaisia:

1. Kaikille $f \in F$ asetetaan sääntö $S \to \langle s, \varepsilon, f\rangle$.
2. Kaikille siirtymille $\big((q,u,A),(r,B_1\cdots B_n)\big) \in \delta$, missä $q, r \in Q, u \in \Sigma^*, n > 0$, $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ ja $B_1 \cdots B_n \in \Gamma$, lisätään sääntö

   $$\langle q, A, p\rangle \to u\langle r, B_1, q_1\rangle\langle q_1, B_2, q_2\rangle \cdots \langle q_{n-1}, B_n, p\rangle$$

   kaikille $p, q_1, \ldots, q_{n-1} \in Q$.
3. Kaikille siirtymille $\big((q,u,A),(r,\varepsilon)\big) \in \delta$, missä $q, r \in Q, u \in \Sigma^*$ ja $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$, lisätään sääntö

   $$\langle q, A, p\rangle \to u\langle r, \varepsilon, p\rangle$$
4. Kaikille $q \in Q$ lisätään sääntö $\langle q, \varepsilon, q\rangle \to \varepsilon$.

Säännöistä ensimmäinen ilmaisee, että tarkoituksena on päästä alkutilasta johonkin lopputilaan niin, että pino jää lopuksi tyhjäksi. Viimeistä muotoa olevat säännöt kertovat, että mitään laskentaa ei tarvita, ellei siirrytä toiseen tilaan. Muotoa 2 olevat säännöt kuvaavat pitkää suoritusta, jolla siirrytään tilasta q tilaan p ja samalla poistetaan A pinosta. Säännön oikea puoli konstruoi automaatin tilasiirtymien jonon siirtymä kerrallaan. Muotoa 3 olevat säännöt ovat analogisia muotoa 2 olevien sääntöjen kanssa.

Kielioppi $G = (V, \Sigma, P, S), V = \Sigma \cup \{S\} \cup \{\langle q, A, p\rangle \mid q, p \in Q, A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}\}$

$$
\begin{aligned}
P = \{& S \to \langle s, e, f\rangle, && (1.)\\
& \langle s, \varepsilon, s\rangle \to \varepsilon, \langle q, \varepsilon, q\rangle \to \varepsilon, \langle f, \varepsilon, f\rangle \to \varepsilon, && (4.)\\
& \langle s, \varepsilon, s\rangle \to \varepsilon\langle q, c, s\rangle, && (2./tr.1)\\
& \langle s, \varepsilon, q\rangle \to \varepsilon\langle q, c, q\rangle, && (2./tr.1)\\
& \langle s, \varepsilon, f\rangle \to \varepsilon\langle q, c, f\rangle, && (2./tr.1)\\
& \langle q, c, s\rangle \to a\langle q, a, s'\rangle\langle s', c, s\rangle && (2./tr.2)\\
& \langle q, c, q\rangle \to a\langle q, a, q'\rangle\langle q', c, q\rangle && (2./tr.2)\\
& \langle q, c, f\rangle \to a\langle q, a, f'\rangle\langle f', c, f\rangle && (2./tr.2)\\
& \langle q, a, s\rangle \to a\langle q, a, s'\rangle\langle s', a, s\rangle && (2./tr.3)\\
& \langle q, a, q\rangle \to a\langle q, a, q'\rangle\langle q', a, q\rangle && (2./tr.3)\\
& \langle q, a, f\rangle \to a\langle q, a, f'\rangle\langle f', a, f\rangle && (2./tr.3)\\
& \langle q, b, s\rangle \to a\langle q, \varepsilon, s\rangle && (3./tr.4)\\
& \langle q, b, q\rangle \to a\langle q, \varepsilon, q\rangle && (3./tr.4)\\
& \langle q, b, f\rangle \to a\langle q, \varepsilon, f\rangle && (3./tr.4)\\
& \langle q, c, s\rangle \to b\langle q, b, s'\rangle\langle s', c, s\rangle && (2./tr.5)\\
& \langle q, c, q\rangle \to b\langle q, b, q'\rangle\langle q', c, q\rangle && (2./tr.5)\\
& \langle q, c, f\rangle \to b\langle q, b, f'\rangle\langle f', c, f\rangle && (2./tr.5)\\
& \langle q, b, s\rangle \to b\langle q, b, s'\rangle\langle s', b, s\rangle && (2./tr.6)\\
& \langle q, b, s\rangle \to b\langle q, b, q'\rangle\langle q', b, q\rangle && (2./tr.6)\\
& \langle q, b, s\rangle \to b\langle q, b, f'\rangle\langle f', b, f\rangle && (2./tr.6)\\
& \langle q, a, s\rangle \to b\langle q, \varepsilon, s\rangle && (3./tr.7)\\
& \langle q, a, q\rangle \to b\langle q, \varepsilon, q\rangle && (3./tr.7)\\
& \langle q, a, f\rangle \to b\langle q, \varepsilon, f\rangle && (3./tr.7)\\
& \langle q, c, s\rangle \to \varepsilon\langle f, \varepsilon, s\rangle && (3./tr.8)\\
& \langle q, c, q\rangle \to \varepsilon\langle f, \varepsilon, q\rangle && (3./tr.8)\\
& \langle q, c, f\rangle \to \varepsilon\langle f, \varepsilon, f\rangle && (3./tr.8)
\end{aligned}
$$

Näistä säännöistä suuri osa on tarpeettomia. Tarvittavat saadaan selville lähtemällä liikkeelle säännöstä $S \to \langle s, \varepsilon, f\rangle$, ja katsomalla, mitä kaikkia sääntöjä voidaan käyttää. Tuloksena syntyvät säännöt ovat

$$
\begin{aligned}
P = \{& S \to \langle s, \varepsilon, f\rangle\\
& \langle s, \varepsilon, f\rangle \to \langle q, c, f\rangle\\
& \langle q, c, f\rangle \to a\langle q, a, q\rangle\langle q, c, f\rangle\\
& \langle q, c, f\rangle \to b\langle q, b, q\rangle\langle q, c, f\rangle\\
& \langle q, c, f\rangle \to \langle f, \varepsilon, f\rangle\\
& \langle q, a, q\rangle \to a\langle q, a, q\rangle\langle q, a, q\rangle\\
& \langle q, a, q\rangle \to b\langle q, \varepsilon, q\rangle\\
& \langle q, b, q\rangle \to b\langle q, b, q\rangle\langle q, b, q\rangle\\
& \langle q, b, q\rangle \to a\langle q, \varepsilon, q\rangle\\
& \langle q, \varepsilon, q\rangle \to \varepsilon\\
& \langle f, \varepsilon, f\rangle \to \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

Kielioppia voi vielä sieventää. Merkitään $\langle q, c, f \rangle = S$, $\langle q, b, q \rangle = B$, $\langle q, a, q \rangle = A$, ja tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow aAS \mid bBS \mid \varepsilon \\ & A \rightarrow aAA \mid b, \\ & B \rightarrow bBB \mid a \} \end{aligned}$$