T-79.1001/2 **Syksy 2007**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet (T/Y)
Harjoitus 4
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

Säännölliset lausekkeet määritellään induktiivisesti:

- $\emptyset$ ja kaikki $a \in \Sigma$ ovat säännöllisiä lausekkeita.
- Mikäli α ja β ovat säännöllisiä lausekkeita, niin myös $(\alpha\beta), (\alpha \cup \beta)$ ja α^* ovat säännöllisiä lausekkeita.
- Mitkään muut lausekkeet eivät ole säännöllisiä.

Säännöllisestä lausekkeesta $\emptyset^*$ käytetään lyhennysmerkintää ε (myös merkinnät e ja λ esiintyvät kirjallisuudessa). Yleensä jätetään ylimääräiset sulut pois: $((a(bc)) \cup (cd^*)) = abc \cup cd^*$.
Säännöllinen lauseke α määrittelee kielen $L(\alpha)$, joka on joukon Σ^* osajoukko. Esimerkiksi:

$$L(ab \cup ac^*d) = \{ab, ad, acd, accd, accd, acccd, accccd, \dots\} \ .$$

Mikäli sekaantumisen vaaraa ei ole[1], jätetään $L()$ melkein aina pois säännöllisen lausekkeen ympäriltä, ja käytetään lauseketta itseään tarkoittamaan niiden sanojen joukkoa, jotka kuuluvat sen kuvaamaan kieleen.
Säännölliset lausekkeet on ehkä helpointa ajatella muottina. Sana kuuluu kieleen, jos sen saa sovitettua lausekkeen antamaan muottiin:

- $ab \Rightarrow$ otetaan ensin a, sitten b
- $a \cup b \Rightarrow$ otetaan joko a tai b
- $a^* \Rightarrow$ otetaan kuinka monta a:ta tahansa (myös 0).

4. **Tehtävä**: Sievennä seuraavia säännöllisiä lausekkeita (so. konstruoi yksinkertaisemmat lausekkeet samojen kielten kuvaamiseen):

   1. $(\emptyset^* \cup a)(a^*)^*(b \cup a)b^*$
   2. $(a \cup b)^* \cup \emptyset \cup (a \cup b)b^*a^*$
   3. $a(b^* \cup a^*)(a^*b^*)^*$

   Vastaus:

   (a)
$$\begin{aligned}(\emptyset^* \cup a)(a^*)^*(b \cup a)b^* &= (\varepsilon \cup a)(a^*)^*(b \cup a)b^* \\ &= (\varepsilon \cup a)a^*(b \cup a)b^* && L((\alpha^*)^*) = L(\alpha^*) \\ &= a^*(b \cup a)b^* && L((\varepsilon \cup a)a^*) = L(a^*)\end{aligned}$$

   (b)
$$(a \cup b)^* \cup \emptyset \cup (a \cup b)b^*a^* = (a \cup b)^*$$

   Sievennyksen tuloksen näkee suoraan siitä, että $L((a \cup b)^*) = \Sigma^*$, joten jo ensimmäinen alilauseke generoi kaikki aakkoston merkkijonot.

   (c)
$$a(b^* \cup a^*)(a^*b^*)^* = a(a \cup b)^*$$

   Tässä huomataan, että alilauseke $R_2 = (a^*b^*)^*$ generoi kaikki merkkijonot, jotka $R_1 = (b^* \cup a^*)$ generoi, joten R_1 voidaan poistaa.

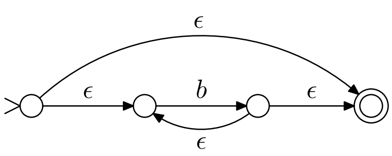
[1] Ja valitettavan usein myös silloin, kun sekaantumisen vaara on olemassa.

5. **Tehtävä**:
Ratkaise, kuvaavatko säännölliset lausekkeet $r_1 = b^*a(a^*b^*)^*$ ja $r_2 = (a \cup b)^*a(a \cup b)^*$ saman kielen muodostamalla lausekkeita vastaavat (minimaaliset) deterministiset tilakoneet.

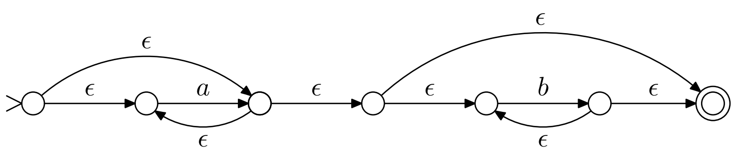
Vastaus: Kutakin säännöllistä kieltä vastaa tilojen nimeämistä lukuunottamatta yksikäsitteinen minimaalinen deterministinen automaatti. Mikäli kahta säännöllistä lauseketta vastaavat minimiautomaatit ovat samat, ovat ne ekvivalentteja.

Rakennetaan vaiheittain säännöllistä lauseketta r_1 vastaava tilakone.

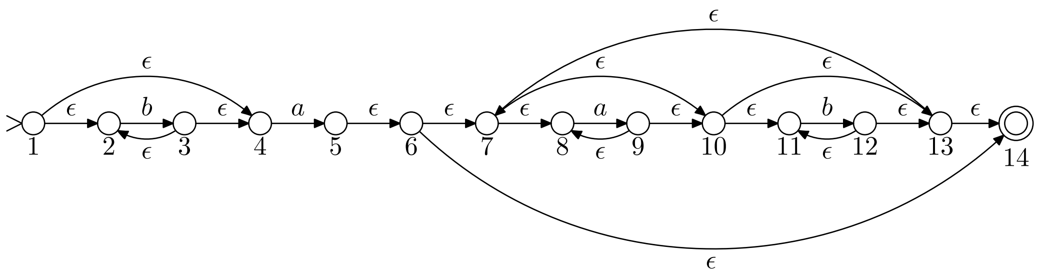
b^*:



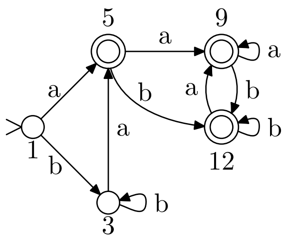
a^*b^*:



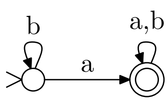
$b^*a(a^*b^*)^*$:



Poistetaan automaatista tyhjät siirtymät:

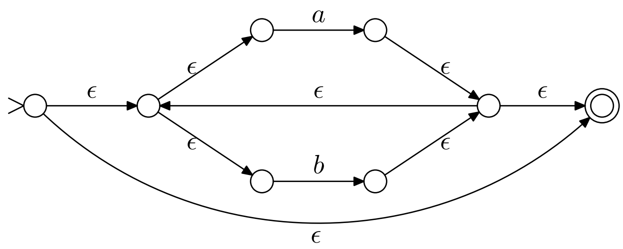


Huomataan, että syntynyt automaatti on jo deterministinen, joten voidaan siirtyä suoraan minimointiin. Minimointialgoritmi yhdistää tilat 1 ja 3 sekä tilat 6, 10 ja 14. Näin ollen pienimmäksi lausekkeen r_1 tunnistavaksi tilakoneeksi saadaan:

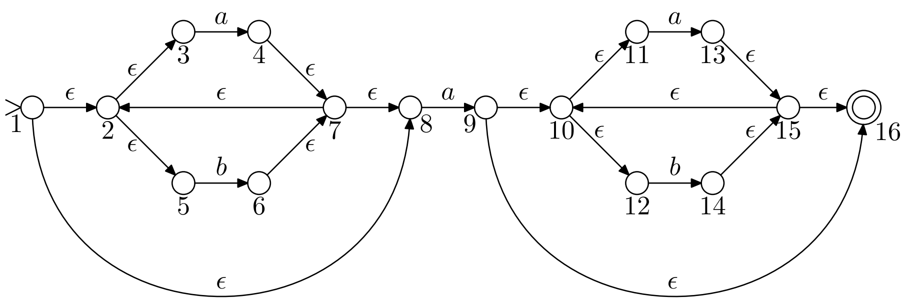


Rakennetaan vaiheittain r_2:a vastaava automaatti:

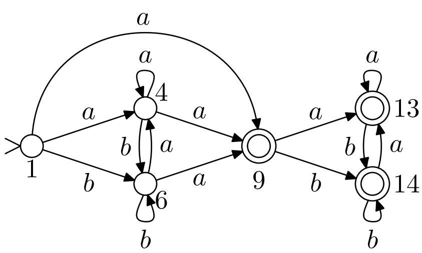
$(a \cup b)^*$



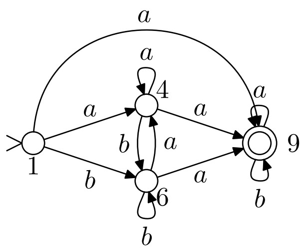
$(a \cup b)^* a(a \cup b)^*$



Poistetaan seuraavaksi tyhjät siirtymät:

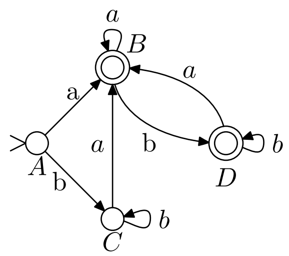


Huomataan, että konetta voidaan sieventää yhdistämällä kaikki lopputilat yhdeksi tilaksi:

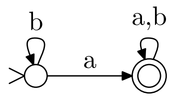


Determinisoidaan tämä tilakone:

det. tila	vast. tilat	a	b	
A	$\{1\}$	$\{4,9\}$	$\{6\}$	
B	$\{4,9\}$	$\{4,9\}$	$\{6,9\}$	$\times$
C	$\{6\}$	$\{4,9\}$	$\{6\}$	
D	$\{6,9\}$	$\{4,9\}$	$\{6,9\}$	$\times$



Minimointi muuttaa automaatin muotoon:



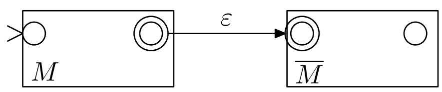
Koska tulokseksi saatiin sama tilakone kummallekin lausekkeelle, r_1 ja r_2 ovat ekvivalentit.

6. **Tehtävä**: Olkoon L säännöllinen kieli. Osoita, että kieli $L' = \{xy \mid x \in L, y \notin L\}$ on säännöllinen.

Vastaus: Kielen todistaminen säännölliseksi onnistuu yleensä helpoiten muodostamalla kielen tunnistava äärellinen automaatti. Tehtävässä on annettuna kieli L, jonka avulla muodostetaan kieli:

$$L' = \{xy \mid x \in L \text{ ja } y \notin L\}$$

Koska L on säännöllinen, on olemassa deterministinen tilakone M, joka hyväksyy sen. Muodostetaan nyt deterministinen tilakone $\overline{M}$ siten, että se on muuten samanlainen kuin M, mutta hyväksyvien ja hylkäävien lopputilojen joukot vaihdetaan keskenään, eli $\overline{M}$ hyväksyy kaikki ne sanat, jotka M hylkää ja päinvastoin. Yhdistetään nyt nämä tilakoneet epädeterministiseksi koneeksi M', siten, että kaikista M:n lopputiloihin lisätään tyhjä siirtymä $\overline{M}$:n alkutilaan. Nyt M' hyväksyy kielen L', joten L' on säännöllinen.



Usein tämänkaltaisisssa todistuksissa on mahdollista käyttää kieliperheen sulkeumaominaisuuksia: säännöllisten kielten joukko on suljettu unionin, katenaation, Kleenen tähden, komplementoinnin ja leikkauksen suhteen.

Kieli L' on muodostettu katenaation avulla kielestä L ja sen komplementista $\overline{L}$ ($y \notin L \Rightarrow y \in \overline{L}$). Koska säännöllisten kielten joukko on suljettu katenaation ja komplementin suhteen ja L on säännöllinen, on myös L' säännöllinen.

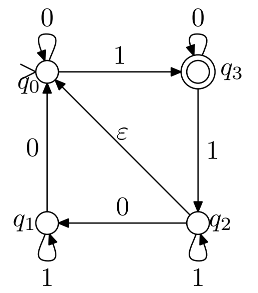
Sulkeumaominaisuuksien kanssa täytyy olla varovainen, sillä niitä on helppo käyttää väärin. Ominaisuudet takaavat säännölisyyden vain yhteen suuntaan. Esimerkiksi, jos kieli A on säännöllinen ja se voidaan muodostaa kielien B ja C unionina, ei B:n ja C:n säännöllisyydestä voida todeta vielä mitään. Tämä nähdään vaikkapa seuraavasta esimerkistä:

$$B = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$
$$A = B \cup \overline{B} = \Sigma^*$$

Kieli A on säännöllinen, vaikka B ja $\overline{B}$ ovat molemmat epäsäännöllisiä. Samalla tavalla voi käydä myös katenaation, Kleenen tähden ja leikkauksen tapauksessa.

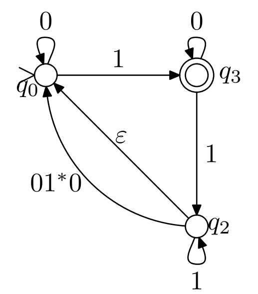
Liite: säännöllisen lausekkeen generointi automaatista

Muodostetaan säännöllinen lauseke, joka vastaa seuraavaa äärellistä automaattia:



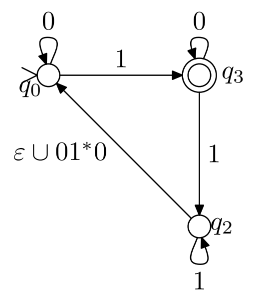
Aluksi koneesta poistetaan kaikki tilat, joista ei voida saavuttaa hyväksyvää lopputilaa. Näitä ei tässä koneessa ole. Mikäli koneella on useampi kuin yksi hyväksyvä tila, niin ne muutetaan hylkääviksi tiloiksi ja niihin lisätään tyhjä siirtymä uuteen hyväksyvään tilaan. Koska annetussa koneessa on jo valmiiksi vain yksi lopputila, ei tätäkään askelta tarvitse tällä kertaa suorittaa.

Seuraavaksi poistetaan koneesta alku- ja lopputilaa lukuunottamatta kaikki tilat yksi kerrallaan. Poistetaan ensin tila q_1:

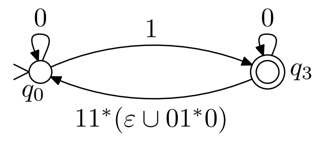


Kaikki koneessa olevat siirtymät, jotka eivät liity tilaan q_1 jäävät ennalleen. Kaikki tilan q_1 läpi kulkevat polut korvataan suoralla siirtymällä, jonka kaarilausekkeeksi asetetaan katenaatio polulla olevista lausekkeista. Tässä tapauksessa siirtymä $q_2 \xrightarrow{01^*0} q_0$ saadaan yhdistämällä siirtymät $q_2 \xrightarrow{0} q_1$, $q_1 \xrightarrow{1} q_1$ ja $q_1 \xrightarrow{0} q_0$. Intuitiivisesti saatu lauseke tarkoittaa sitä, että alkuperäisessä koneessa päästään tilasta q_2 tilaan q_0 siten, että ensin luetaan yksi 0, minkä jälkeen voidaan pyöriä silmukassa 1:tä lukien tilassa q_1 ja lopuksi luetaan yksi 0. Muita polkuja ei kulje tilan q_1 läpi.

Koneen tilasta q_2 on kaksi eri siirtymää tilaan q_0. Nämä voidaan yhdistää seuraavaan tapaan:



Seuraavaksi poistetaan q_2:



Nyt voidaan lukea haluttu säännöllinen lauseke tilakoneen siirtymistä. Ideana on katsoa koneesta kaikki mahdolliset polut alkutilasta lopputilaan. Lausekkeen alkuun tulee siirtymä alkutilasta lopputilaan ja loppuun kaikki mahdolliset tavat siirtyä lopputilasta takaisin itseensä:

$$\underbrace{0^*1}_{q_0 \to^* q_1}\underbrace{(0 \cup 11^*(\varepsilon \cup 01^*0)0^*1)^*}_{q_1 \to^* q_1}.$$