T-79.1001/2 **Syksy 2006**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet T/Y
Harjoitus 1, 18.–20.9.
Tehtävät

Muista ilmoittautua kurssille TOPI-järjestelmän kautta 27.9. mennessä. Ilmoittautuminen on kirjanpitosyistä **pakollista**, *vaikka et olisi aikonutkaan osallistua luennoille tai harjoituksiin.*

Kotitehtävät:

1. Olkoon $\Sigma = \{a, b\}$. Anna esimerkkejä merkkijonoista, jotka kuuluvat seuraaviin kieliin (vähintään kolme esimerkkiä kussakin kohdassa):
   (a) $\{w \in \Sigma^* \mid w$ sisältää parillisen määrän a:ta ja kolmella jaollisen määrän b:tä$\}$;
   (b) $\{a^{2n}b^{3m} \mid n > m \geq 0\}$;
   (c) $\{uvuv \mid u, v \in \Sigma^*\}$;
   (d) $\{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^*$ s.e. $w = uu = vvv\}$.

2. (a) Olkoon perusjoukon $A = \{a, b, c, d\}$ relaatio $R \subseteq A \times A$ määritelty:
   $$R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, a), (d, d)\}.$$
   Piirrä seuraavien relaatioiden graafiesitykset:
   (i) R, (ii) R^{-1}, (iii) $R \circ R$, (iv) $R^{-1} - R$.
   Ovatko jotkin näistä relaatioista funktioita?
   (b) Luettele kaikki joukon $\{1, 2, 3\}$ ekvivalenssirelaatiot (ositukset).

3. Todista induktiolla oikeaksi kaava:
   $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

Demonstraatiotehtävät:

4. Määritellään perusjoukossa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaatio $\sim$ säännöllä:
   $$(m, n) \sim (p, q) \quad \Leftrightarrow \quad m + n = p + q.$$
   Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio ja kuvaile intuitiivisesti ("geometrisesti") sen ekvivalenssiluokkia.

5. Todista induktiolla, että jos X on äärellinen joukko, jonka koko on $n = |X|$, niin sen potenssijoukon koko on $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

6. Todista induktiolla, että jokaisessa äärellisen perusjoukon S osittainjärjestyksessä on ainakin yksi minimialkio. Osoita myös esimerkein, että minimialkio ei välttämättä ole yksikäsitteinen, ja että väite ei ole yleisesti voimassa, jos perusjoukko S on ääretön.