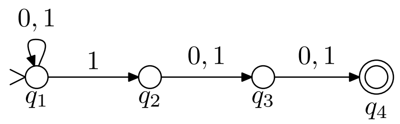
T-79.1001/2 **Syksy 2006**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet (T/Y)
Harjoitus 3
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. **Tehtävä**: Laadi epädeterministinen äärellinen automaatti, joka testaa onko annetun binäärijonon kolmanneksi viimeinen merkki 1, ja determinisoi se.

   Vastaus: Kielen $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$:n kolmanneksi viimeinen merkki on 1 $\}$ tunnistaa epädeterministinen automaatti $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$, missä

$$\begin{aligned} Q &= \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \\ F &= \{q_4\}, \end{aligned}$$

   ja siirtymäfunktio δ on määritelty kuten allaolevassa kuvassa:

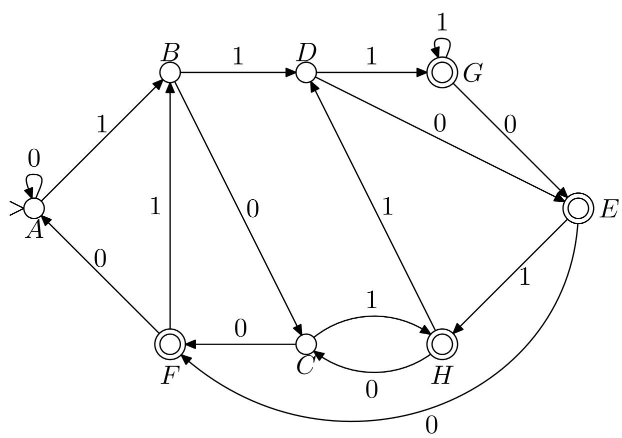


   Konetta M vastaava deterministinen automaatti M' muodostetaan siten, että M':n tiloiksi otetaan kaikki Q:n osajoukot ($Q' = \mathcal{P}(Q)$). Tilajoukkoihin koodataan kaikki mahdolliset M:n laskennat. Esimerkiksi kun M on lukenut syötteen 010, voi se olla joko tilassa q_1 tai q_3. Niinpä koneen M' täytyy samalla syötteellä päätyä tilaan $\{q_1, q_3\}$.

   Muodostetaan tilansiirtofunktio δ':

q	0	1	uusi nimi
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	A
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	B
$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_4\}$	C
$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$	D
$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_4\}$	$E\times$
$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$	$F\times$
$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$	$G\times$
$\{q_1, q_2, q_4\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$H\times$

   Automaatin M' lopputiloiksi otetaan kaikki ne tilat, joissa esiintyy jokin M:n lopputiloista. Ylläolevassa taulukossa ne on merkitty rastilla.



5. **Tehtävä**: Osoita, että jos kieli $L \subseteq \{a,b\}^*$ voidaan tunnistaa äärellisellä automaatilla, niin samoin voidaan tunnistaa myös kieli $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$.

   Vastaus:

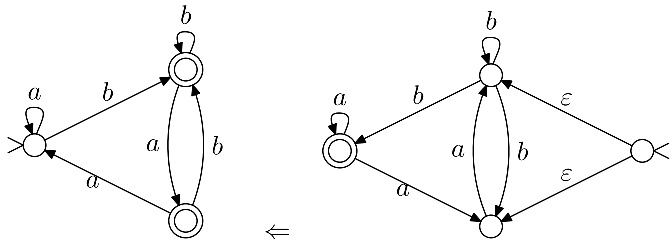
   Olkoon $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ äärellinen automaatti, joka tunnistaa kielen L (eli $L = L(M)$). Muodostetaan tämän perusteella automaatti M', missä:

$$\begin{aligned} M' &= \{Q \cup \{q_0'\}, \Sigma, \delta', q_0', \{q_0\} \\ \delta' &= \{(q_i, a, q_j) \mid \delta(q_j, a) = q_i\} \\ &\qquad \cup \{(q_0', \varepsilon, q_i) \mid q_i \in F\}, \end{aligned}$$

   missä $q_0' \notin Q$.

   Suorasanaisesti sanottuna yllä oleva määritelmä tarkoittaa sitä, että kielen L^R tunnistava automaatti saadaan L:n tunnistavasta automaatista siten, että automaatin siirtymät käännetään ympäri, siihen lisätään yksi uusi tila uudeksi alkutilaksi, asetetaan uudesta tilasta ε-siirtymät kaikkiin alkuperäisen automaatin lopputiloihin ja ainoaksi lopputilaksi otetaan alkuperäisen automaatin alkutila.

   Automaatti M' aloittaa laskennan syötteellä w^R siirtymällä epädeterministisesti johonkin alkuperäisen automaatin hyväksyvistä tiloista. Sen jälkeen se suorittaa koneen M siirtymiä käännetyssä järjestyksessä. Syöte hyväksytään mikäli se näin tehdessään päätyy lopulta alkuperäiseen alkutilaan, koska tässä tapauksessa automaatilla M on olemassa hyväksyvä laskenta syötteelle w.



6. **Tehtävä**: Osoita, että jos aakkoston $\Sigma = \{a,b\}$ kielet A ja B voidaan tunnistaa äärellisillä automaateilla, niin samoin voidaan tunnistaa myös kielet $\bar{A} = \Sigma^* - A$, $A \cup B$ ja $A \cap B$.

   Vastaus: Olkoon A ja B aakkoston $\Sigma = \{a,b\}$ kieliä, jotka voidaan tunnistaa äärellisillä automaateilla. Halutaan osoittaa, että myös kielet $\bar{A} = \Sigma^* - A$, $A \cup B$ ja $A \cap B$ voidaan tunnistaa äärellisillä automaateilla.

   $\bar{A}$: Olkoon $M_A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ deterministinen tilakone[1], joka tunnistaa kielen A. Muodostetaan tästä kielen komplementin tunnistava automaatti $M_{\bar{A}}$:

$$M_{\bar{A}} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F) \ .$$

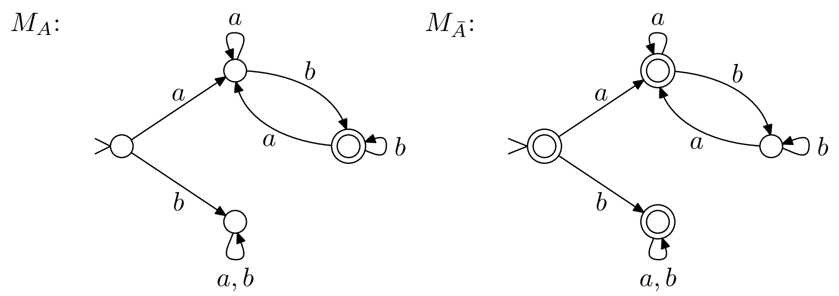
   Kone $M_{\bar{A}}$ toimii muuten täsmälleen samalla tapaa kuin M_A, mutta hyväksyvät tilat on muutettu hylkääviksi ja päinvastoin. Näin ollen $M_{\bar{A}}$ hyväksyy ne sanat, jotka M_A hylkää ja hylkää ne, jotka M_A hyväksyy, joten $L(M_{\bar{A}}) = \bar{A}$.

   Tarkastellaan esimerkiksi automaattia, joka tunnistaa kielen:

$$A = \{w \in \Sigma^* \mid \ w \text{ on muotoa } axb, \text{ missä } x \in \Sigma^*\} \ .$$

   Kieleen A kuuluvat kaikki sanat, jotka alkavat a-kirjaimella ja päättyvät b-kirjaimeen. Alla esitetään automaatit M_A ja $M_{\bar{A}}$:

[1] M_A on välttämättä olemassa, sillä mitä tahansa epädeterminististä automaattia kohden voidaan muodostaa saman kielen tunnistava deterministinen automaatti.



Tässä on huomattava, että esitetty konstruktio toimii vain, jos M_A on deterministinen. (Yritä etsiä yksinkertainen vastaesimerkki epädeterministiselle tapaukselle.)

$A \cup B$: Olkoot $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$ ja $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$ äärelliset automaatit, jotka tunnistavat kielet A ja B. Oletetaan lisäksi, että tilajoukot ovat erilliset, eli $Q_A \cap Q_B = \emptyset$. Tämä oletus voidaan tehdä, sillä tarvittaessa voidaan toisen koneen tilat nimetä uudelleen. Muodostetaan epädeterministinen tilakone $M_{A\cup B}$ seuraavasti:

$$M_{A\cup B} = (Q, \Sigma, \delta, s, F) \ ,$$

missä

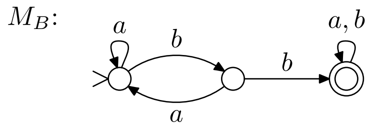
$$\begin{aligned} Q &= Q_A \cup Q_B \cup \{s\} \\ F &= F_A \cup F_B \\ \delta &= \delta_A \cup \delta_B \cup \{(s, \varepsilon, s_a), (s, \varepsilon, s_b)\} \ . \end{aligned}$$

Kone $M_{A\cap B}$ muodostetaan siis yhdistämällä koneet M_A ja M_B. Tila s on uusi alkutila, josta voidaan siirtyä tyhjällä siirtymällä joko M_A:n tai M_B:n alkutilaan.

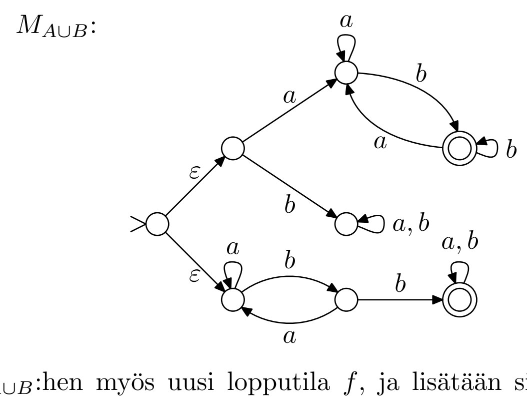
Jos sana x kuuluu kieleen A, $M_{A\cup B}$ hyväksyy sen siirtymällä aluksi tilaan s_A ja suorittamalla sen jälkeen samat siirrot kuin kone M_A olisi suorittanut. Mikäli $x \in B$, siirrytään tilaan s_B ja toimitaan kuten M_B.

Tarkastellaan edellisessä kohdassa esiteltyä automaattia M_A sekä uutta automaattia M_B, joka tunnistaa kielen:

$$B = \{w \in \Sigma^* \mid w : \text{ssä esiintyy osajono } bb\} \ .$$



Kielen $A \cup B$ hyväksyvä automaatti on seuraavanlainen:



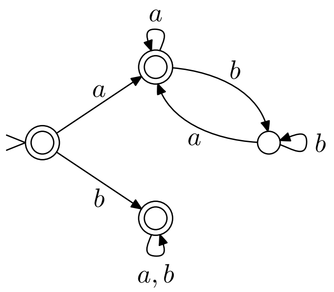
Usein lisätään $M_{A\cup B}$:hen myös uusi lopputila f, ja lisätään sinne tyhjä siirtymä kaikista alkuperäisistä lopputiloista $q \in F_A \cup F_B$. Tällöin $F = \{f\}$.

$A \cap B$: Väite seuraa suoraan kahdesta edellisestä kohdasta, sillä DeMorganin sääntöjen perusteella:

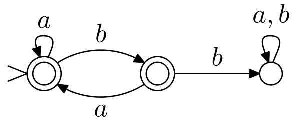
$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \ .$$

Tarkastellaan vielä yllä esiteltyjä koneita M_A ja M_B, ja muodostetaan kone $M_{A \cap B}$ käyttäen DeMorganin sääntöä:

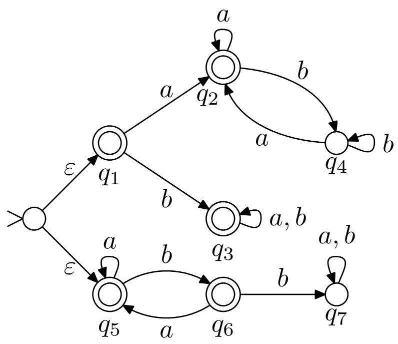
$M_{\bar{A}}$:



$M_{\bar{B}}$:

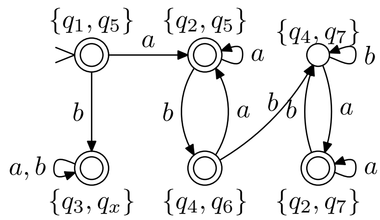


$M_{\bar{A} \cup \bar{B}}$:



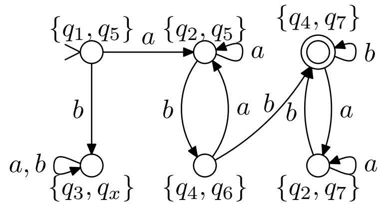
Koneen $M_{\bar{A} \cup \bar{B}}$ komplementointia varten se täytyy ensin determinisoida (kone on jo minimoitu, yksityiskohdat liitteenä):

$M'_{\bar{A} \cup \bar{B}}$:



Nyt saadaan haluttu kone vaihtamalla ylläolevan koneen hyväksyvät tilat hylkääviksi ja päinvastoin:

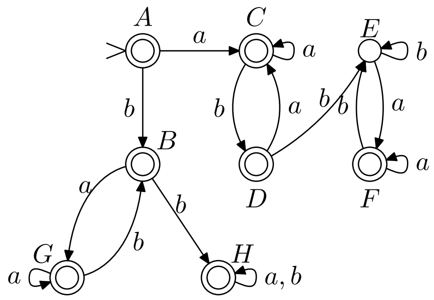
$M_{A \cap B}$:



Kahden automaatin leikkaus voidaan määritellä myös suoraan käyttäen samantapaista menetelmää kuin seuraavassa tehtävässä.

Liite: tilakoneen minimointi

Tilakoneen determinisointialgoritmilla saadaan tehtävän 5. tilakone $M_{\bar{A}\cup\bar{B}}$ muutettua seuraavaan muotoon:



Nyt halutaan löytää pienin deterministinen tilakone, joka tunnistaa saman kielen. Luennolla esitetty algoritmi toimii siten, että automaatin tilojen välille määritellään ekvivalenssirelaatio, jota vaiheittain tarkennetaan, kunnes haluttu lopputulos saavutetaan.

Algoritmin ensimmäisessä vaiheessa poistetaan kaikki tilat, joita ei voida saavuttaa alkutilassa. Tässä automaatissa sellaisia ei ole, joten automaatti pysyy vielä ennallaan.

Seuraavaksi muodostetaan ensimmäinen ekvivalenssiositus siten, että automaatin lopputiloista tehdään yksi luokka ja kaikista muista tiloista toinen:

0-ekvivalenssi:

Luokka	Tila	a	b
I	A	C (I)	B (I)
	B	G (I)	H (I)
	C	C (I)	D (I)
	D	C (I)	E (II)
	F	F (I)	E (II)
	G	G (I)	B (I)
	H	H (I)	H (I)
II	E	F (I)	E (II)

Kaaviosta huomataan, että I-luokan tiloista D ja F siirrytään b:llä II-luokan tilaan E, kun taas kaikista muista tiloista b-siirtymä vie johonkin I-luokkaan kuuluvaan tilaan. Erotetaan nyt kaksi erilaista tilaa omaksi luokakseen:

1-ekvivalenssi:

Luokka	Tila	a	b
I	A	C (I)	B (I)
	B	G (I)	H (I)
	C	C (I)	D (III)
	G	G (I)	B (I)
	H	H (I)	H (I)
II	E	F (III)	E (II)
III	D	C (I)	E (II)
	F	F (III)	E (II)

Tällä kertaa tilat C ja F eivät sovi luokkiinsa, ja ne täytyy erottaa omiksi luokikseen. Näin jatketaan, kunnes lopulta kaikki luokat ovat konsistentteja:

2-ekvivalenssi:

Luokka	Tila	a	b
I	A	C (IV)	B (I)
	B	G (I)	H (I)
	G	G (I)	B (I)
	H	H (I)	H (I)
II	E	F (V)	E (II)
III	D	C (IV)	E (II)
IV	C	C (IV)	D (III)
V	F	F (V)	E (II)

3-ekvivalenssi:

Luokka	Tila	a	b
I	A	C (IV)	B (VI)
II	E	F (V)	E (II)
III	D	C (IV)	E (II)
IV	C	C (IV)	D (III)
V	F	F (V)	E (II)
VI	B	G (VI)	H (VI)
	G	G (VI)	B (VI)
	H	H (VI)	H (VI)

Kaikki luokat ovat nyt konsistentit, ja voidaan muodostaa tilakone, jonka tiloina ovat syntyneet ekvivalenssiluokat. Minimoitu kone on esitetty kaaviona tehtävän 5. vastauksen yhteydessä.

Terminä k-ekvivalenssi tarkoittaa sitä, että kaikki samaan luokkaan kuuluvat tilat käsittelevät samalla tapaa kaikkia korkeintaan k merkkiä pitkiä syötteitä. Jos $p \overset{k}{\equiv} q$ ja tilasta p lähtevä k:n pituinen laskenta päätyy lopputilaan, niin myös q:sta lähtevä samalla syötteellä tehty laskenta päätyy hyväksyvään tilaan, ja päinvastoin.