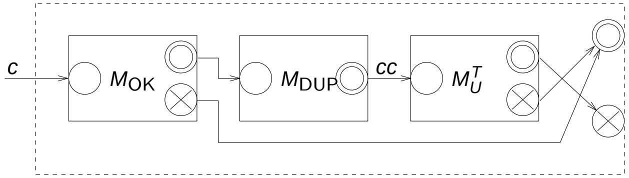
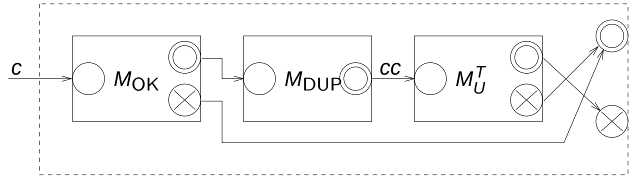
Lause 6.7 Kieli U ei ole rekursiivinen.

Todistus. Oletetaan, että kielellä U olisi totaalinen tunnistajakone M_U^T. Tällöin voitaisiin Lemman 6.5 kielelle D muodostaa totaalinen tunnistajakone M_D seuraavasti.

Olkoon M_{OK} totaalinen Turingin kone, joka testaa, onko syötteenä annettu merkkijono kelvollinen Turingin koneen koodi, ja olkoon M_{DUP} totaalinen Turingin kone, joka muuntaa syötejonon c muotoon cc. Kone M_D muodostetaan koneista M_U^T, M_{OK} ja M_{DUP} yhdistämällä seuraavan kaavion esittämällä tavalla:





Selvästi kone M_D on totaalinen, jos kone M_U^T on, ja

$$\begin{aligned} c \in L(M_D) \quad &\Leftrightarrow \quad c \notin L(M_{\text{OK}}) \text{ tai } cc \notin L(M_U^T) \\ &\Leftrightarrow \quad c \notin L(M_c) \\ &\Leftrightarrow \quad c \in D. \end{aligned}$$

Mutta lemman 6.5 mukaan kieli D ei ole rekursiivinen; ristiriita. $\square$.

Seuraus 6.8 Kieli

$$\tilde{U} = \{c_M w \mid w \notin L(M)\}$$

ei ole rekursiivisesti numeroituva.

Todistus. Kieli $\tilde{U}$ on oleellisesti sama kuin universaalikielen U komplementti $\bar{U}$; tarkasti ottaen on $\bar{U} = \tilde{U} \cup \text{ERR}$, missä ERR on helposti tunnistettava rekursiivinen kieli

$$\begin{aligned} \text{ERR} \quad = \quad & \{x \in \{0,1\}^* \mid x \text{ ei sisällä alkuosanaan} \\ & \text{kelvollista Turingin koneen koodia}\}. \end{aligned}$$

Jos siis kieli $\tilde{U}$ olisi rekursiivisesti numeroituva, olisi samoin myös kieli $\bar{U}$. Koska kieli U on rekursiivisesti numeroituva, seuraisi tästä, että U on peräti rekursiivinen. Mutta tämä on vastoin edellisen lauseen tulosta, mistä päätellään, että kieli $\tilde{U}$ ei voi olla rekursiivisesti numeroituva. $\square$

6.5 Turingin koneiden pysähtymisongelma

Lause 6.9 Kieli

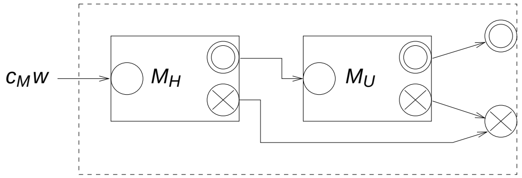
$$H = \{c_M w \mid M \text{ pysähtyy syötteellä } w\}$$

on rekursiivisesti numeroituva, mutta ei rekursiivinen.

Todistus. Todetaan ensin, että kieli H on rekursiivisesti numeroituva. Lauseen 6.6 todistuksessa esitetystä universaalikoneesta M_U on helppo muokata kone, joka syötteellä $c_M w$ simuloi koneen M laskentaa syötteellä w ja pysähtyy hyväksyvään lopputilaan, jos ja vain jos simuloitu laskenta ylipäätään pysähtyy.

Osoitetaan sitten, että kieli H ei ole rekursiivinen. Oletetaan nimittäin, että olisi $H = L(M_H)$ jollakin totaalisella Turingin koneella M_H. Oletetaan lisäksi, että kone M_H pysähtyessään jättää nauhalle alkuperäisen syötteensä, mahdollisesti tyhjämerkeillä jatkettuna. Olkoon M_U lauseen 6.6 todistuksessa konstruoitu universaalikone.

Kielelle U voitaisiin nyt muodostaa totaalinen tunnistaja yhdistämällä koneet M_H ja M_U seuraavasti:



Lauseen 6.7 mukaan tällaista kielen U tunnistajakonetta ei kuitenkaan voi olla olemassa. Saatu ristiriita osoittaa, että H ei voi olla rekursiivinen. □

Seuraus 6.10 Kieli

$$\tilde{H} = \{c_M w \mid M \text{ ei pysähdy syötteellä } x\}$$

ei ole rekursiivisesti numeroituva. □

6.7 Ricen lause

Ricen lauseen mukaan *kaikki* Turingin koneiden tunnistamia kieliä, t. niiden laskemia I/O-kuvauksia koskevat epätriviaalit kysymykset ovat ratkeamattomia.

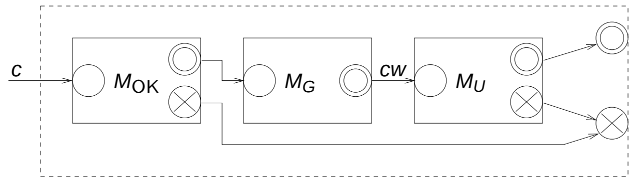
Johdantona lauseen todistukseen tarkastellaan ensin yhtä sen erikoistapausta, Turingin koneiden tunnistamien kielten *epätyhjyysongelmaa*: "Hyväksyykö annettu Turingin kone yhtään syötemerkkijonoa?" Ongelman esitys formaalina kielenä on

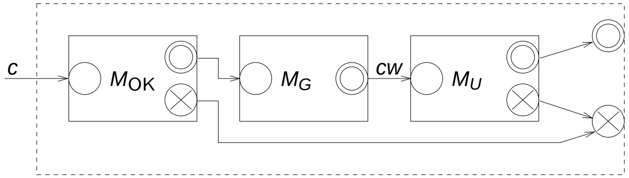
$$\mathrm{NE} = \{c \in \{0,1\}^* \mid L(M_c) \neq \emptyset\}.$$

Lause 6.11 Kieli NE on rekursiivisesti numeroituva, mutta ei rekursiivinen.

Todistus. Todetaan ensin, että kieli NE on rekursiivisesti numeroituva muodostamalla sille tunnistajakone M_{NE}. Kone M_{NE} on helpointa suunnitella epädeterministisenä.

Olkoon M_{OK} Turingin kone, joka testaa onko annettu syöte kelvollinen Turingin koneen koodi, ja olkoon M_G epädeterministinen Turingin kone, joka kirjoittaa nauhalla jo olevan merkkijonon perään mielivaltaisen binäärijonon w. Kone M_{NE} voidaan muodostaa yhdistämällä koneet M_{OK}, M_G ja universaalikone M_U seuraavasti:



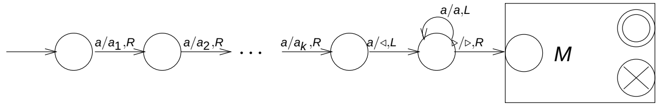


Selvästi on:

$$
\begin{aligned}
& c \in L(M_{\mathrm{NE}}) \\
\Leftrightarrow \quad & c \text{ on kelvollinen Tk-koodi ja } \exists\, w \text{ s.e. } cw \in U \\
\Leftrightarrow \quad & c \text{ on kelvollinen Tk-koodi ja } \exists\, w \text{ s.e. } w \in L(M_c) \\
\Leftrightarrow \quad & L(M_c) \neq \emptyset.
\end{aligned}
$$

Osoitetaan, ettei kieli NE ole rekursiivinen. Oletetaan, että kielellä NE olisi totaalinen tunnistajakone M^T_{NE}, ja muodostetaan sitä käyttäen totaalinen tunnistajakone M^T_U kielelle U. (Ristiriita.)

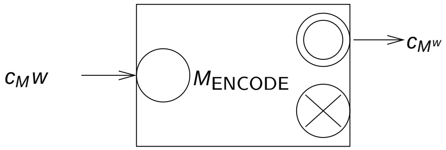
Konstruktio perustuu syötteiden koodaamiseen Turingin koneiden "ohjelmavakioiksi". Olkoon M mielivaltainen Turingin kone, jonka toimintaa syötteellä $w = a_1 a_2 \ldots a_k$ halutaan tutkia. Merkitään M^w:llä konetta, joka aina korvaa "todellisen" syötteensä merkkijonolla w ja toimii sitten kuten M:



Koneen M^w toiminta ei siis riipu lainkaan sen todellisesta syötteestä, vaan se joko hyväksyy tai hylkää kaikki merkkijonot, sen mukaan miten M suhtautuu w:hen:

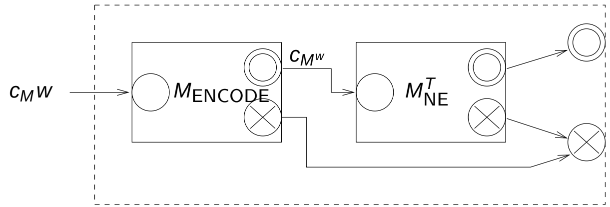
$$
L(M^w) = \begin{cases} \{0,1\}^*, & \text{jos } w \in L(M); \\ \emptyset, & \text{jos } w \notin L(M). \end{cases}
$$

Olkoon sitten M_{ENCODE} Turingin kone, joka saa syötteenään mielivaltaisen Turingin koneen M koodista c_M ja binäärijonosta w muodostuvan jonon $c_M w$ ja jättää tuloksenaan nauhalle edellä kuvatun koneen M^w koodin c_{M^w}:



(Jos syöte ei ole muotoa cw, missä c on kelvollinen Turingin koneen koodi, kone M_{ENCODE} päätyy hylkäävään lopputilaan.) Kone M_{ENCODE} operoi siis Turingin koneiden *koodeilla*. Annetun koneen M koodiin se lisää siirtymäviisikoita ("konekäskyjä") ja muuttaa tilojen numerointia siten, että koodi tulee koneen M sijaan esittämään konetta M^w.

Universaalikielelle U voitaisiin nyt koneet M_{ENCODE} ja hypoteettinen M^T_{NE} seuraavalla tavalla yhdistämällä muodostaa totaalinen tunnistajakone M^T_U:



Kone M^T_U on totaalinen, jos M^T_{NE} on, ja $L(M^T_U) = U$, koska:

$$
c_M w \in L(M^T_U) \Leftrightarrow c_{M^w} \in L(M^T_{\mathrm{NE}}) = \mathrm{NE} \Leftrightarrow L(M^w) \neq \emptyset \Leftrightarrow w \in L(M).
$$

Mutta kieli U ei ole rekursiivinen, joten tällainen totaalinen tunnistajakone M^T_U ei ole mahdollinen. Saadusta ristiriidasta päätellään, että myöskään kielellä NE ei voi olla totaalista tunnistajaa M^T_{NE}. $\square$

Ricen lause

Turingin koneiden *semanttinen ominaisuus* $\mathcal{S}$ on mikä tahansa kokoelma rekursiivisesti numeroituvia aakkoston $\{0,1\}$ kieliä; koneella M *on ominaisuus* $\mathcal{S}$, jos $L(M) \in \mathcal{S}$. *Triviaalit ominaisuudet* ovat $\mathcal{S} = \emptyset$ (ominaisuus, jota ei ole millään koneella) ja $\mathcal{S} = RE$ (ominaisuus, joka on kaikilla koneilla).

Ominaisuus $\mathcal{S}$ on *ratkeava*, jos joukko

$$\text{codes}(\mathcal{S}) = \{c \mid L(M_c) \in \mathcal{S}\}$$

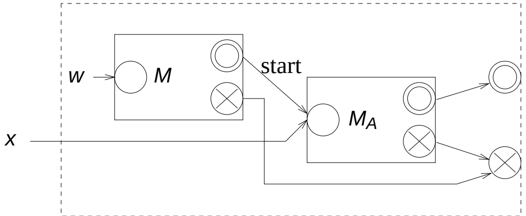
on rekursiivinen. Toisin sanoen: ominaisuus on ratkeava, jos annetusta Turingin koneen koodista voidaan algoritmisesti päätellä, onko koneella kysytty semanttinen ominaisuus.

Lause 6.12 [Rice 1953] Kaikki Turingin koneiden epätriviaalit semanttiset ominaisuudet ovat ratkeamattomia.

Todistus. Olkoon $\mathcal{S}$ mielivaltainen epätriviaali semanttinen ominaisuus. Voidaan olettaa, että $\emptyset \notin \mathcal{S}$: toisin sanoen, että tyhjän joukon tunnistavilla Turingin koneilla ei ole tarkasteltavaa ominaisuutta. Jos nimittäin $\emptyset \in \mathcal{S}$, voidaan ensin osoittaa, että ominaisuus $\bar{\mathcal{S}} = \text{RE} - \mathcal{S}$ on ratkeamaton, ja päätellä edelleen tästä että myös ominaisuus $\mathcal{S}$ on ratkeamaton. (Koska $\text{codes}(\bar{\mathcal{S}}) = \overline{\text{codes}(\mathcal{S})}$.)

Koska $\mathcal{S}$ on epätriviaali, on olemassa jokin Turingin kone M_A, jolla on ominaisuus $\mathcal{S}$ — jolla siis $L(M_A) \neq \emptyset \in \mathcal{S}$.

Olkoon nyt M_{ENCODE} Turingin kone, joka muodostaa syötteenä annetusta merkkijonosta $c_M w$ seuraavanlaisen Turingin koneen M^w koodin.



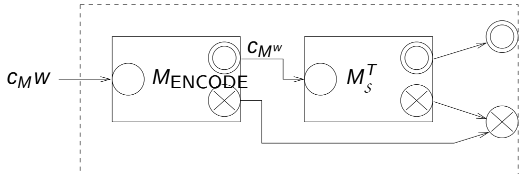
Jos syöte ei ole vaadittua muotoa, M_{ENCODE} päätyy hylkäävään lopputilaan.

Syötteellä x kone M^w toimii ensin kuten M syötteellä w. Jos M hyväksyy w:n, M^w toimii kuten kone M_A syötteellä x. Jos M hylkää w:n, myös M^w hylkää x:n. Kone M^w tunnistaa siis kielen

$$L(M^w) = \begin{cases} L(M_A), & \text{jos } w \in L(M); \\ \emptyset, & \text{jos } w \notin L(M). \end{cases}$$

Koska oletuksen mukaan $L(M_A) \in \mathcal{S}$ ja $\emptyset \notin \mathcal{S}$, on koneella M^w ominaisuus $\mathcal{S}$, jos ja vain jos $w \in L(M)$.

Oletetaan sitten, että ominaisuus $\mathcal{S}$ olisi ratkeava, so. että kielellä $\text{codes}(\mathcal{S})$ olisi totaalinen tunnistajakone $M_{\mathcal{S}}^T$. Tällöin saataisiin edellisen todistuksen tapaan totaalinen tunnistajakone kielelle U yhdistämällä koneet M_{ENCODE} ja $M_{\mathcal{S}}^T$ seuraavasti:



Selvästi kone M_U^T on totaalinen, jos $M_{\mathcal{S}}^T$ on, ja

$$c_M w \in L(M_U^T) \Leftrightarrow c_{M^w} \in L(M_{\mathcal{S}}^T) = \text{codes}(\mathcal{S}) \Leftrightarrow L(M^w) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow w \in L(M).$$

Koska kieli U ei ole rekursiivinen, tämä on mahdotonta, mistä päätellään, ettei ominaisuus $\mathcal{S}$ voi olla ratkeava. $\square$