T-79.1001 **Syksy 2005**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet T
Harjoitus 8, 15.–16.11.
Tehtävät

Kotitehtävät:

1. Osoita, säännöllisten kielten pumppauslemmaa käyttäen, että parillisen pituisten palindromisanojen muodostama kieli

$$\{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

ei ole säännöllinen.

2. Osoita, yhteydettömien kielten pumppauslemmaa käyttäen, että kieli

$$\{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$$

ei ole yhteydetön. (*Vihje:* Tarkastele muotoa $a^n b^n a^n b^n$ olevia merkkijonoja.)

3. Osoita, että kahden numeroituvan joukon A_1 ja A_2 yhdiste $A_1 \cup A_2$ on numeroituva. Päättele tästä induktiolla, että sama pätee n:n numeroituvan joukon yhdisteelle $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, kaikilla $n \geq 2$. (*Lisäkysymys:* Päteekö väite edelleen, jos yhdistettäviä joukkoja on numeroituvasti ääretön määrä, siis tapauksessa $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, missä kukin A_i on numeroituva?)

Demonstraatiotehtävät:

4. Osoita, että yhteydettömien kielten luokka on suljettu yhdiste-, katenaatio- ja sulkeumaoperaatioiden suhteen, so. jos kielet $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ovat yhteydettömiä, niin samoin ovat myös kielet $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$ ja L_1^*.

5. Osoita, että yhteydettömien kielten luokka ei ole suljettu leikkausten eikä komplementtien suhteen. (*Vihje:* Esitä kieli $\{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$ kahden yhteydettömän kielen leikkauksena.)

6. Osoita, että karteesinen tulo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on numeroituvasti ääretön. (*Vihje:* Ajattele parit $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sijoitetuiksi euklidiseen (x,y)-tasoon $\mathbb{R}^2$. Numeroi parit suoran $y = -x$ suuntaisin vinorivein.) Päättele tämän tuloksen perusteella, että myös rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituvasti ääretön.